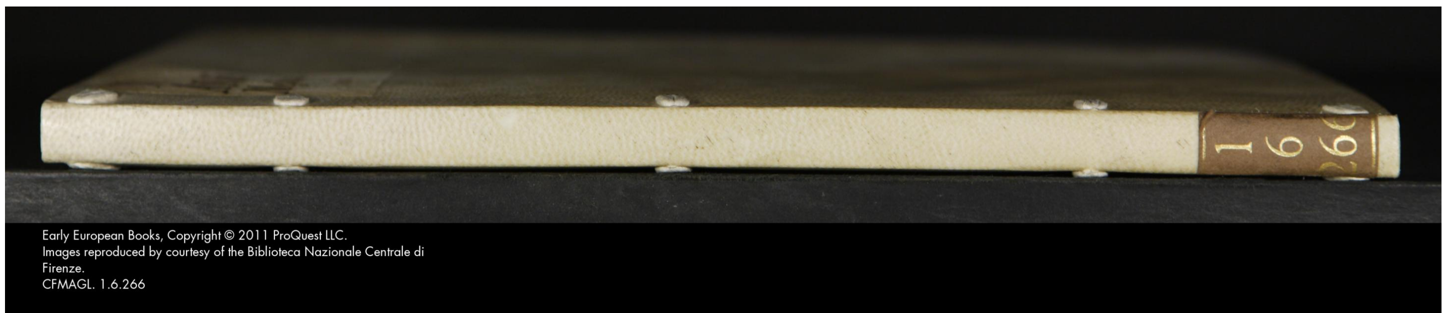
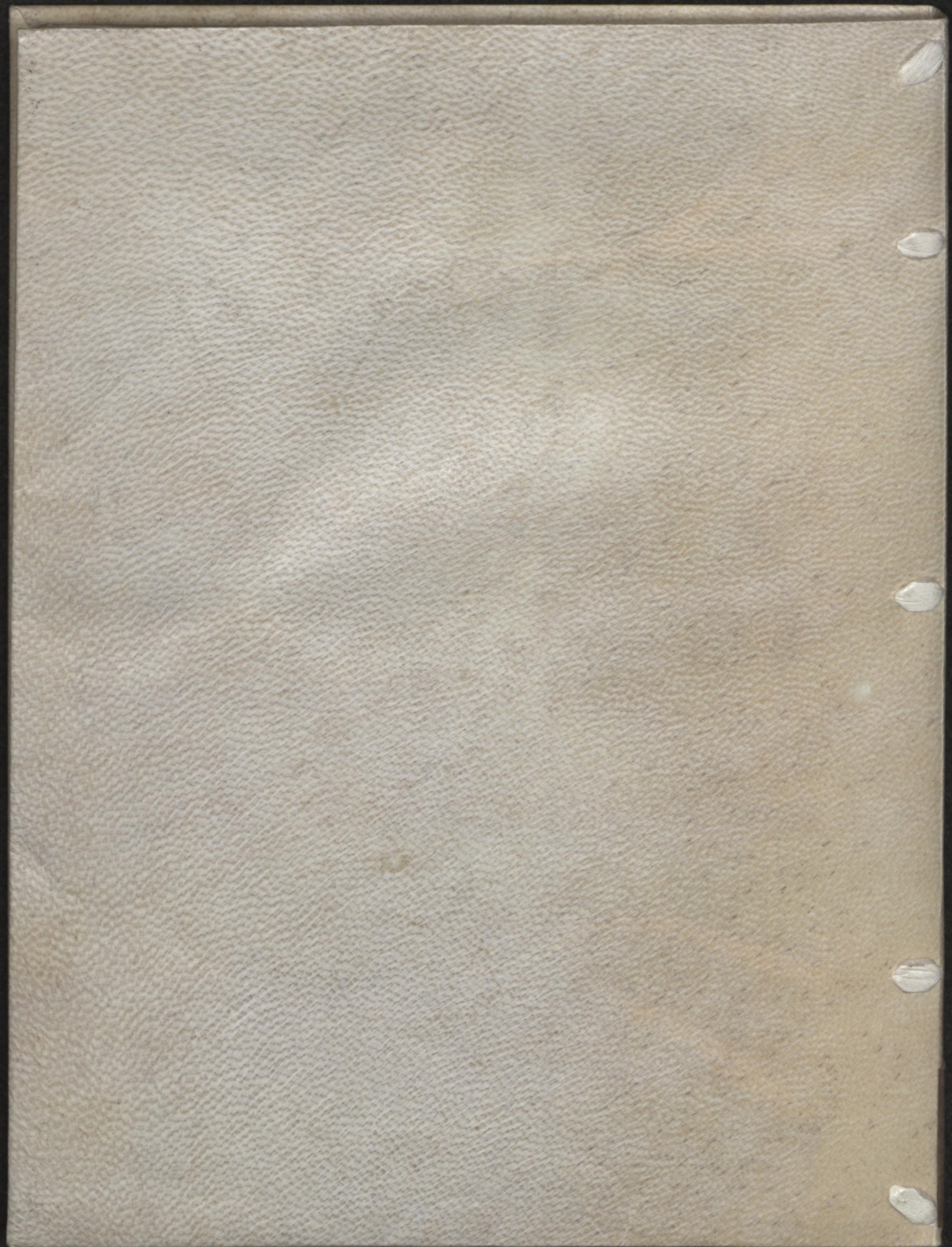
XI
ANON.
Mesolab.
1659


1
6
26



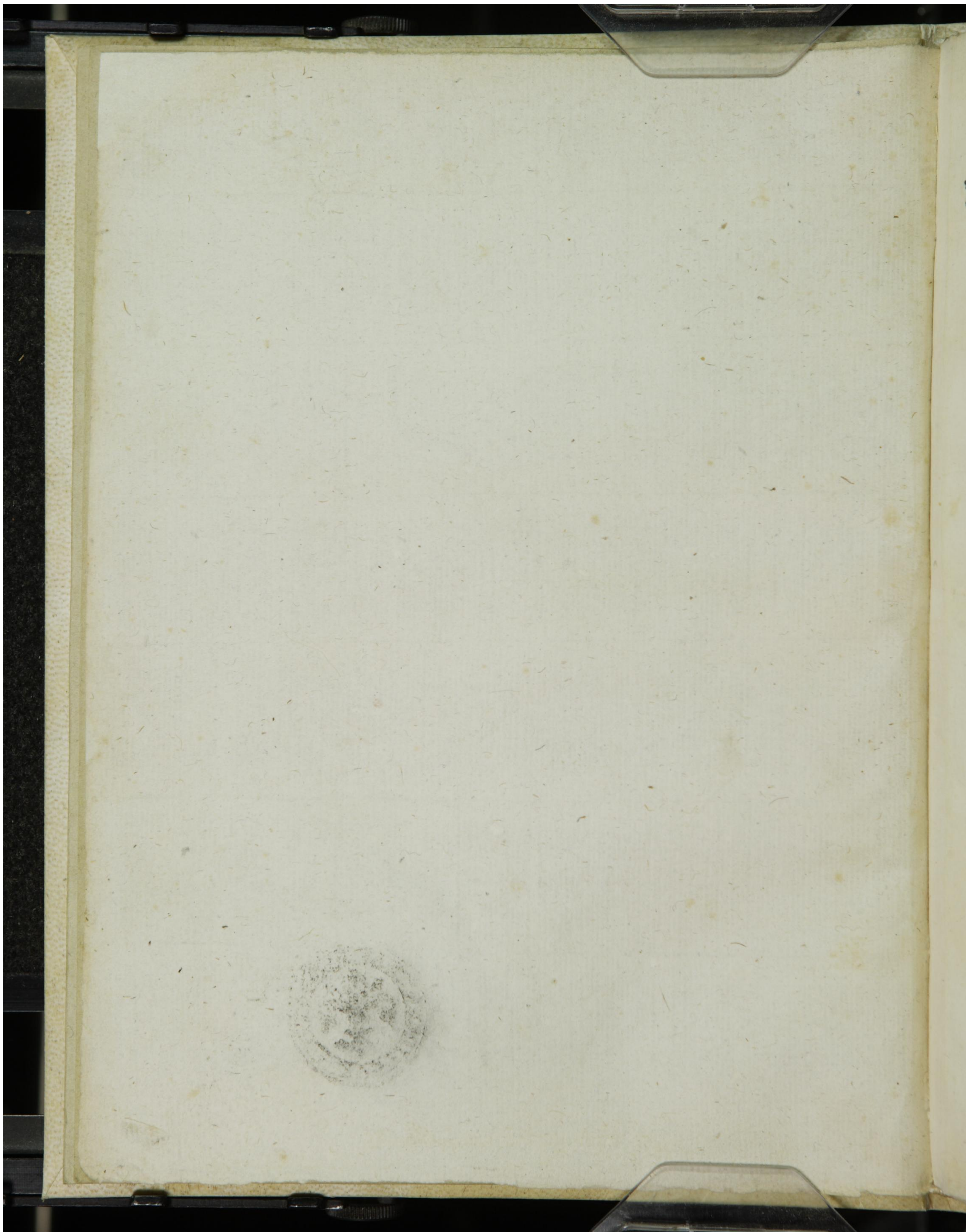








A



MESOLABVM
SEV
DVÆ MEDIÆ PROPORTIONALES
INTER EXTREMAS DATAS
PER CIRCVLVM ET ELLIPSIM
VEL HYPERBOLAM
INFINITIS MODIS EXHIBITÆ.

Accedit

PROBLEMATVM QVORVMLIBET SOLIDORVM

EFFECTIO

Per easdem curvas, iisdem modis.
& appendix
De eorundem solutione per circulum
& parabolam.



Leodij Eburonum
Typis I. F. van Milst.

CIↄ Iↄ C LIX.



LECTORI GEOMETRÆ
Auctor S. P. D.

PRoblematis non novi, nec incelebris effectionem tibi damus, Amice Lector, sed nobilis adeo & antiqui, vt consecrare audeat origines suas, & ad oraculum referre. Quod sive Delijs peste laborantibus, seu sepulchri, quod Glauco parabatur, occasione redditum sit; sive etiam ea narratio, inter Græcas fabulas recensenda est; parum interesse arbitror: satis enim claritatem suam tuetur, ex quo præstantissimi nunc & olim Geometræ, in eo solvendo non contemnendam operam posuerunt. Itaque forsitan actum, quod aiunt, agere videbor, dum post tot Clarissimorum virorum conatus, eiusdem Problematis contemplationem rursus aggredior. Sed nihilominus aliquid superesse credidi, in quo non inutiliter exercerer, cum primum illius naturam pressius examinavi. Non quod ex eorum numero sim, qui rectâ & circulo illud construere inani labore contendunt: Sed quod viderem, illos etiam qui vel organicæ rationis, vel sectionum Conicarum necessitatem agnovere, tam paucas nobis eius-

Vide Eutocij Com. in Archim.

dem

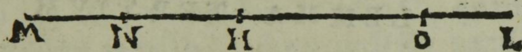
dem demonſtrationes hactenus oſtendiſſe. Vix enim tot eſſe videntur, quot ſæcula, ab eo quo proponi cœptum eſt, numeramus. Paucæ omnino per circulum & Hyperbolam, vel parabolam; per circulũ vero & Ellipſim, nulla, quod equidem ſciam, hactenus edita eſt. Quæ cum animo verſarem, & otium nactus, ante aliquot annos in hanc curam incumberem, inveni non vnam, ſed infinitas; neque id vice ſimplici, ſed pluribus; & methodum ſecutus, quâ cœperam, omnia problemata ſolida, infinitis modis, per circulum & Ellipſim, vel Hyperbolam, pari felicitate conſtruxi. Eius ſpecimen hic habes, Amice lector, brevi libello concluſum; vt ſi forte reipsâ minus placeat, mole ſaltem diſplicere non poſſit. Methodum non adſcripſi, tum quod gratius ac vtilius futurum arbitratus ſum, ſi eam ipſe privato ſtudio, ex his ſpeciminibus eliceres; tum etiam, quod iudicium tuum de totâ re præſtolarer. Decrevi enim, ſi favor tuus accedat, non ipſam methodum tantum, ſed & alia, quæ ſimul obſeruavi, brevi, Deo bene iuvante, cenſuræ tuæ ſubmittere. Vale.

MESOL.



MESOLABVM
SEV
DVÆ MEDIÆ PROPORTIONALES INTER DATAS
PER CIRCVLVM ET ELLIPSIM
VEL HYPERBOLAM
INFINITIS MODIS EXHIBITÆ.

LEMMA PRIMVM





I à rectâ M L, auferantur æquales NM, O L, & inter N, & O, ſumatur quodlibet punctum H, Dico rectangulum M H L, minus rectangulo M N L, æquale eſſe rectangulo M H O.

Rectangulum enim M H L, æquatur duobus rectangulis M N in H L, & N H in H L, ſed rectangulum N H in H L, eſt etiam æquale duobus rectangulis N H in H O, & N H in O L; igitur rectangulum M H L, æquatur tribus rectangulis MN in HL, N H in HO, & NH in OL (ſive N M, ex hypotheſi) hoc eſt duobus rectangulis NHO, LNM. Igitur, ablato vtrimque rectangulo MNL, rectangulum MHL, minus rectangulo MNL, æquale erit rectangulo N H O. Quod erat demonſtrandum.

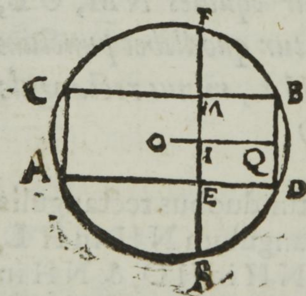
LEMMA SECVNDVM



IN rectâ E R, si fuerit vt R E ad FE, ita Q E, ad G E, erit vt EG, ad EQ, ita rectangulum E F G, ad rectangulum E F in Q R.

Cum enim sit vt RE, ad FE, ita QE, ad GE, erit permutando, vt RE, ad QE, ita FE, ad GE, & dividendo, vt RQ, ad QE, ita FG, ad GE, & convertendo, ac permutando, vt EG, ad E Q, ita FG, ad R Q; hoc est sumptâ communi altitudine EF, ita rectangulum E F G, ad rectangulum ex EF in QR. Quod erat demonstrandum.

LEMMA TERTIVM



SI in circulo O A F B, inscriptum, fuerit rectangulum A C B D sitque ex F puncto in circumferentiâ ducta F E, normalis ad latus A D, ita vt rectangulum C A E, sit æquale quadrato E F; erunt quatuor rectæ A C, A E, E F, A D, in continuâ analogiâ.

Producatur FE ad circumferentiam in R, & cadat in B D, ex centro normalis O Q, secans FE in I: Itaque BQ, Q D, erunt æquales, hoc est MI, IE, (ob parallelas) sed sunt etiam æquales R I, I F, Igitur & reliquæ R E, MF, æquales erunt, & rectangulum E F M, æquabitur rectangulo R E F, hoc est rectangulo DE A (ob circulum)

Quoniam autem, ex hypothesi, rectangulum DAE, sive

DEA, cum quadrato AE, æquatur quadrato EF, hoc est duobus rectangulis EFM, FEM; ablatis æqualibus DEA, EFM, remanebit quadratũ AE, æquale rectangulo FEM, eritque vt EM sive AC, ad EA, ita EA ad EF, sed cum ex hypothesi rectangulum DAE, sit æquale quadrato, EF, est vt EA, ad EF, ita EF, ad AD. Igitur vt AC, ad EA, ita EA, ad EF, & EF, ad AD Quod erat demon strandum.

PROPOSITIO PRIMA.

INter extremas datas, duas rectas medio loco proportionales, per circulum & Ellipsim, infinitis modis, exhibere.

Sint extremæ datæ Z maior, X minor. Sumatur AD æqualis Z, eique ad rectos erigatur AC, æqualis X, & perficiatur rectangulum ACBD, circaque illud circvlus ADF; Tum sumpto in AC (vel eâdem versus C, quantumlibet productâ) quolibet puncto P, ducatur PK, parallela AD, ad quam sit eadem AD, vt AP ad AC, completoque rectangulo APKI, dividantur rectæ PA, KI, bifariam in N, & O, & iuncta ON extendatur in L, ita vt rectangulum NLO, ad quadratum OK, eandem habeat rationem quam CA, ad AP; sumptâque NM in directum æquali OL, axe ML, describatur semi-ellipsis MFL, cuius applicatarum quadrata, eam habeant rationem ad rectangula sub partibus axis, quam habet AP, ad AC. transibit illa per P, & K, ex constructione, secabitque circulum, vt patet. sit punctum sectionis F, ex quo cadat in AD normalis FE, secans parallelas CB, PK, NO, in punctis Q, G, H.

Dico quatuor AD, EF, EA, AC, esse continuè proportionales.

Producatur EF, & fiat vt EG, ad EQ, ita EF, ad ER.

Nunc quadratum FH, ad quadratum PN, sive GH, est vt rectangulum LHM, ad rectangulum LNM, ob ellipsim; &

dividendo, quadratum F H, minus quadrato G H, (hoc eſt rectangulum EFG) eſt ad quadr. in GH, ſive PN, vt rectangulum LHM, minus rectangulo LNM (hoc eſt vt rectangulum OHN *) ad rectangulum LNM; & permutando rectangulum EFG, eſt ad rectangulum O H N, vt quadratum P N, ad rectangulum LNM, ſive AP ad AC, vel EG ad EQ; ex conſtructione, ſed vt EG, ad EQ, ita rectangulum EFG, ad rectangulum ex EF in QR * Igitur, vt rectangulum EFG, ad rectangulum OHN, ita idem rectangulum E F G, ad rectangulum ex E F in QR, & permutando; ſunt itaque æqualia rectangula EF, QR, & O HN, ſive I E A. Cum vero rectangulum EFQ, ſit etiam æquale rectangulo D E A (ob circulum) erit ablatis vtrimque æqualibus, rectangulum ex E F in QR minus rectangulo E FQ (hoc eſt rectangulum RF E) æquale rectangulo I E A, minus rectangulo DE A (hoc eſt rectangulo ſub ID & EA): Erit itaque vt RE, ad ID, ita AE ad E F.

*per lemma primum.

* p. lemm. 2 dũ.

Vlterius, ex conſtructione, eſt vt R E, ad FE, ita Q E ad GE, ſive CA, ad AP, & vt C A, ad AP, ita K P, vel I A, ad

DA,

DA, erit igitur, vt RE, ad FE, ita IA, ad DA, & dividendo, ac permutando, vt RF, ad ID, ita FE, ad DA: vt autem RF, ad ID, ita demonstrandum est esse AE, ad EF; itaque vt AE, ad FE, ita FE, ad DA. Igitur rectangulum DAE æquale est quadrato EF. & consequenter * quatuor DA, FE, AE, EQ vel AC, sunt in continuâ proportione. Quod erat demonstrandum. *plemm. 3 ii.

Si punctum P supra C, in AC productâ foret acceptum, non absimilis esset demonstratio, quod monuisse sufficiat, cum nullo negotio sese oblatura sit consideranti.

Ex quo evidens est, cum punctum P poßit vbique in lineâ AC, etiam in infinitum productâ, sumi Ellipses infinitas specie differentes satisfacere proposito.

Construxmus itaque Problema per circulum & ellipsim infinitis modis. Quod erat faciendum.

Corollarium

Patet etiam methodus idem problema solvendi per duas ellipses, cum enim quælibet earum quas superiori descriptione complexi sumus, secet circulum in puncto F, sequitur duas quaslibet in eodem puncto sese intersecare.

LEMMA QVARTVM

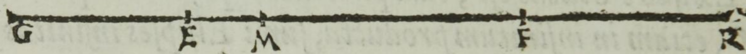


Si a rectâ IO, auferantur æquales IK, OL, & in eâdem productâ sumatur quodlibet punctum Q, Dico rectangulum KQL, minus rectangulo KOL, æquari rectangulo IQO.

Bisecetur IO in V. Itaque rectangulum KQL, vna cum quadrato VL, erit æquale quadrato VQ. sed quadratum VQ

ſimiliter eſt æquale rectangulo IQO, vna cum quadrato VO, & quadratum VO, eſt pariter æquale rectangulo KOL, vna cum quadrato VL: Igitur rectangulum KQL, vna cum quadrato VL, ęquale erit rectangulis IQO, KOL, cum quadrato VL, & ablatis vtrimque rectangulo KOL, & quadrato VL; rectangulum KQL, minus rectangulo KOL, æquabitur rectangulo IQO. Quod erat demonſtrandum.

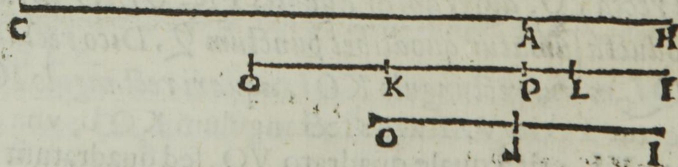
LEMMA QVINTVM



IN rectâ GR, ſumptis tribus punctis E, M, F, ſi fuerit vt GE, ad EM, ita EF, ad FR, erit vt GE, ad EM, ita rectangulum GFE, ad duo rectangula EFR, FEM.

Cum enim ſit vt GE, ad EM, ita EF, ad *FR*; erit permutando & componendo &c, vt GE cum E*F*, ſive G*F*, ad E*F*, ita ME cum *F*R, ad *F*R, Et rurſus permutando, vt GF, ad ME cum FR, ita FE, ad FR; hoc eſt GE ad EM, ex hypotheſi. ſed vt GF, ad EM cum FR, ita (ſumptâ communi altitudine EF) rectangulum GFE, ad duo rectangula MFE, RFE. Igitur vt GE, ad EM, ita rectangulum GFE, ad duo rectangula MEF, RFE. Quod erat &c.

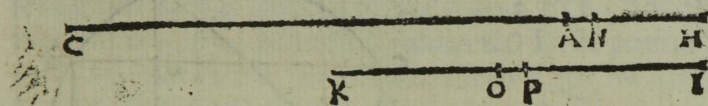
LEMMA SEXTVM



SI fuerint duæ rectæ, CH secta vtcumque in A, & altera OI, vel æqualis mediæ inter CA, & AH, vel major quam media, Dico primo OI ita posse secari in L, vt eadem sit ratio rectanguli OLI, ad quadratum dimidiæ AH, quæ est CA, ad AH.

Sit enim æqualis mediæ, & secetur bifariam in L. Cum sit vt CA, ad OI, ita OI, ad AH, erit vt CA, ad AH, ita quadratum OI, ad quadratum AH, & sumptis subquadruplis, ita rectangulum OLI ad quadratum dimidiæ AH. Quod erat &c

Sit deinde maior, & ex illá resecetur IK æquales mediæ inter CA & AH, quę bifariam secetur in P. patet ita esse quadratum PI ad quadratum dimidiæ AH, vt CA, ad AH. Itaque faciendum est rectangulum OLI, æquale quadrato PI, quod quidem fieri poterit, cum IP sit minor dimidiá OI, ex hypothesi. Quod &c.



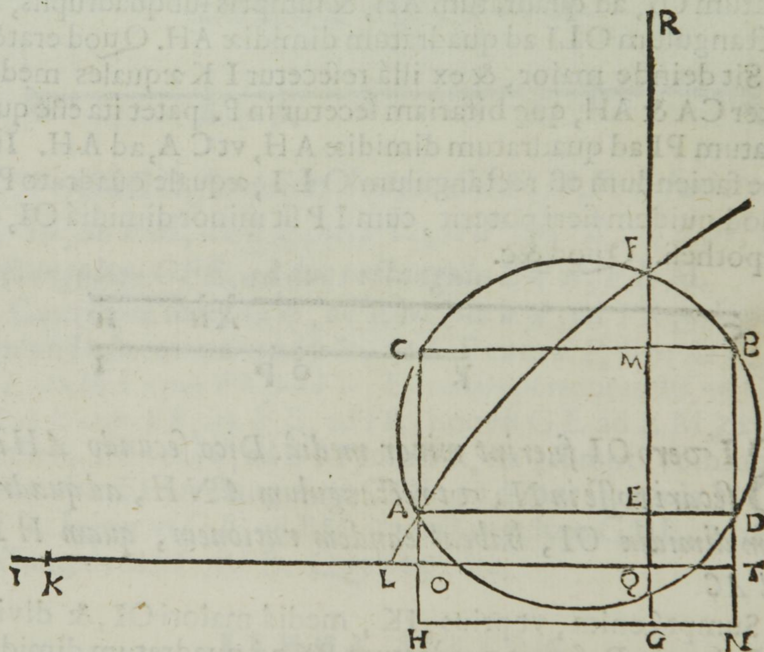
SI vero OI fuerint minor mediâ. Dico secundo AH ita secari posse in N, vt rectangulum ANH, ad quadratum dimidiæ OI, habeat eandem rationem, quam HA, ad AC.

Sumptá enim, vt prius, IK, mediá maiori OI, & divisâ bifariam in P, fiat vt quadratum PK ad quadratum dimidiæ OI, ita quadratum dimidiæ AH ad rectangulum ANH, quod quidem fieri poterit cum KI ponatur maior OI, ideoque rectangulum ANH futurum sit minus quadrato dimidię AH. Igitur erit permutando vt quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum dimidiæ OI, ad rectangulum ANH. sed vt quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum IK, ad quadratum AH, sive CA, ad AH.

Igitur vt C A, ad A H, ita quadratum dimidię OL, ad rectangulum ANH, sive convertendo vt A H, ad CA, ita rectangulum ANH, ad quadratum, dimidię OI, Quod erat &c.

PROPOSITIO SECVNDA

Propositum sit easdem rectas, per circulum & Hyperbolam, infinitis modis exhibere.



Sit, vt prius, circa rectangulum ex datis rectis AD, AC, circulus AFD; producatâque C A vtcumque in H, perficiatur rectangulum HADN, & divisis A H; D N, bifariam in O, & T, iungatur TO, & producatur in I, itavt sit eadem ratio T O ad OI, quæ HA, ad AC. Erit igitur OI, vel maior mediâ

inter

inter CA, AH vel æqualis mediæ vel minor. Sit primo maior, & secetur IO in L, ita vt rectangulum ILO, ad quadratum AO, eandem habeat rationem, quę est CA, ad AH (id enim fieri poterit*) sumpâtque IK, æquali LO, axe KT, latere transverso KL, recto vero, quod sit ad KL, sicut HA ad AC, describatur ex L vertice, semi-hyperbola LAF, transibit illa per A, ex constructione & secabit circulum. secet in puncto F: ex quo cadat in HN normalis FG secans parallelas CB, AE, OT, in punctis M, E, Q. *p. lemm. 6. um

Dico quatuor DA, FE, EA, AC, esse continue proportionales.

Fiat vt GE, ad EM, ita EF, ad FR.

Itaque ob hyperbolam, vt quadratum FQ, ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, ad rectangulum KOL, & dividendo, vt quadratum FQ, minus quadrato AO, sive QE (hoc est vt rectangulum GFE) ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, minus rectangulo KOL (hoc est, ita rectangulum IQO*) ad rectangulum KOL: & permutando, vt rectangulum GFE, ad rectangulum IQO, ita quadratum AO, ad rectangulum KOL, sive latus rectum, ad transversum, vel, ex constructione, HA ad AC. sed vt HA, ad AC, sive GE, ad EM, ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF RFE*, Igitur vt rectangulum GEF ad rectangulum IQO ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF, RFE, & permutando. Sunt itaque æqualia, rectangulum IQO, & duo rectangula MEF, RFE, sed sunt etiam æqualia, ob circulum rectangula EFM & DEA sive TOQ: Igitur additis æqualibus, tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia erunt duobus IQO, TOQ. sed tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia sunt vnico REF, duo vero IQO, TOQ æqualia sunt rectangulo sub IT & OQ; Igitur rectangulum REF, æquale erit rectangulo sub IT & OQ, eritque vt IT, ad RE, ita EF, ad OQ. *p. lemm. 4. *p. lemm. 5.

Nunc, ex constructione, est vt O T, ad OI, ita H A, ad A C, sive G *E* ad *E*M, vel *E F* ad *F*R. Igitur componendo & per conversionem rationis erit vt IT, ad TO, ita R*E*, ad *EF*, & permutando vt IT, ad R *E*, ita TO, ad *EF*. sed ante demonstratum est esse vt IT, ad RE, ita EF, ad OQ; erit itaque vt TO, ad EF, ita EF, ad OQ & quadratum FE, æquabitur rectangulo TOQ, sive DAE, Igitur quatuor D A, EF, AE, AC erunt in continuá analogiá. Quod erat demonstrandum.

* p lemm: 3.um

Si OI esset æqualis mediæ inter C A & AH, tunc bisecanda foret OI, & ex puncto bisectionis, ducenda per A, recta quæ vtique circulo occurreret in puncto F, quæsito, vt facile ostenditur, sednec tanto molimine opus esset, si in punctum H felici casu incidisses, tunc enim ipsæ C A, O I, AH, O T, vel D A essent continue proportionales. vt patet.

Sit nunc *O*I minor quam media. Secetur bifariam in P, & A H, in N, ita vt sit eadem ratio rectanguli H N A, ad quadratum P*O*, que HA, ad AC (hoc enim rursus fieri poterit *) Tum in puncto P, erigantur vtrimque PL, PK, æquales *O*N, & perficiatur rectangulum AHVT, itemque A*O*IY. Deinde axe LT, vertice L, latere transuerso K L, describatur semihyperbole LAF, cuius latus transversum ad rectum, eam habeat rationem quam HA, ad AC, transibit illa per A, cum rectangulum H N *A*, sive KTL, ad quadratum *O* P, sive *A*T, eandem habeat rationem quam *H A* ad *A* C (ex constructione;) secabit etiam circulum in puncto *F*, ex quo demissa normalis *FE*, in *A*D, occurrat C B, in M, & productis P *O*, *V*H, in Q, & G,

* p lemm: 6.tum

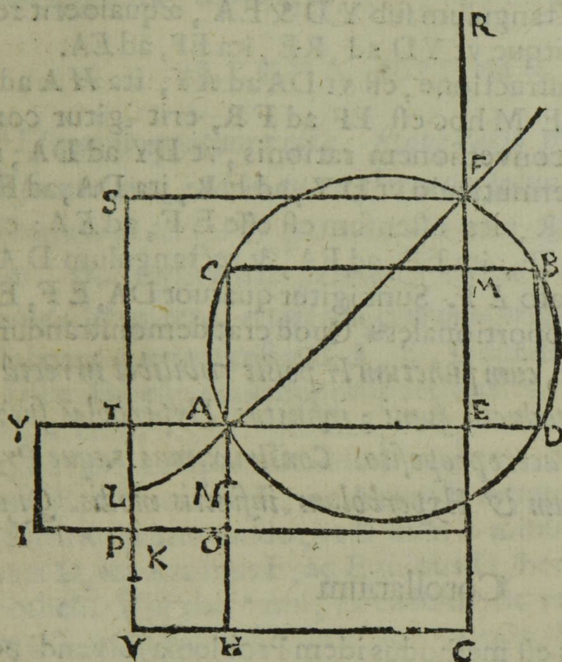
Dico quatuor D *A*, *E* F, *E A*, *A* C, rursus esse continue proportionales,

Producta *E F*, fiat vt G*E*, ad *E*M, ita *E F*, ad *F*R, & applicetur *F*S, ad axem hyperbolæ.

Nunc

Nunc quadratum *FS*, ſive *E* T, ad quadratum T A, eandem habebit rationem, quam rectangulum KSL, ad rectangulum KTL, & dividendo quadratum T *E*, minus quadrato T*A*(hoc eſt rectangulum Y*EA*) ad quadratum T *A*, erit vt rectangulum K S L minus rectangulo KTL (hoc eſt vt rectangulum V S T *) ad rectangulum KT *L*, & permutando, vt rectangulum Y *E A*, ad rectangulum V S T, ita quadratum T A, ad rectangulum KT*L*, hoc eſt ita latus rectum, ad tranſverſum, ſive CA, ad A *H*, ex conſtructione. Igitur convertendo, vt rectangulum VS T, ſive G *FE*, ad rectangulum Y*E*A, ita A*H*, ad AC, ſive G *E* ad *E*M. Sed vt G *E*, ad *E*M, ita idem rectangulum G *F*E, ad duo rectangula M *E* F R *FE*: Itaque rectangulum Y E A, æquale eſt duobus M *EF*, RF*E*. Sunt autem etiam æqualia rectangula D*E*A, *E*FM (ob circulum) Igitur, additis vtrimque æqualibus, rectangulum Y *E*A, vna

* p. lemm. 4.



cum rectangulo DFA, æquale erit tribus rectangulis MEF RFE, EFM. Sed duo rectangula YEA, DEA, æqualia sunt vnico sub YD, & EA, tria vero MEF, RFE, EFM, vnico REF; Igitur rectangulum sub YD & EA, æquale erit rectangulo REF; eritque vt YD, ad, RE, ita EF, ad EA.

Rursus, ex constructione, est vt DA ad AY, ita HA ad AC, sive GE ad EM hoc est EF ad FR, erit igitur componendo, & per conversionem rationis, vt DY ad DA, ita ER, ad EF, & permutando vt DY, ad ER, ita DA, ad FF. Sed vt DY, ad ER, ita ostensum est esse EF, ad EA; erit itaque vt DA, ad EF, ita EF, ad EA, & rectangulum DAE æquabitur quadrato EF. Sunt igitur quatuor DA, EF, EA AC, continue proportionales.* Quod erat demonstrandum.

* p. lemm. 2.

Vnde sequitur, cum punctum H posit vbilibet in rectâ CA, indefinitè productâ sumi; infinitas Hyperbolas specie differentes, satisfacere proposito. Construximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

Corollarium

HInc evidens est methodus idem Problema solvendi per duas Hyberbolas, vel per Ellipsim & Hyperbolam infinitis modis. Cum enim Ellipses & Hyperbolæ ex præscripto constructionum præcedentium descriptæ, omnes secent circulum in F, patet duas quaslibet in eodem puncto sese intersecare.

MONITVM

ET hactenus quidem constructiones per infinitas Ellipses, vel Hyperbolas, vt propositum erat, absoluimus. Addemus nunc particulares aliquot eiusdem Problematis effec-

tiones

tiones, quas magis vniversales reddere poterit, qui tanti esse putaverit, methodum quâ supra vsi sumus, in his etiam experiri. Sit itaque

LEMMA SEPTIMVM

SI fuerint quatuor rectæ, sitque ratio primæ maioris ad secundam, eadem quæ differentiæ secundæ & tertiæ, ad differentiam tertiæ & quartæ. Sit item vt secunda ad tertiam, ita differentia primæ & tertiæ, ad differentiam secundæ & quartæ: erunt illæ continue proportionales.

Habeant quatuor rectæ B, A, E, D conditiones lemmatis. Dico illas esse continue proportionales.

Cum enim sit, ex hypothesi, vt B, ad A; ita A minus E, ad E minus D, erit permutando & componendo, vt B cum A minus E, ad A minus E, ita A cum E minus D, ad E minus D, & rursus permutando, vt B cum A minus E, ad E cum A minus D, ita A minus E, ad E minus D, hoc est B, ad A, ex hypothesi. Vlterius cum, ex eadem, sit vt A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erit permutando, & componendo, vt A cum B minus E, ad B minus E, ita E cum A minus D, ad A minus D, & rursus permutando, vt A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita B minus E, ad A minus D, sed vt A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita ostensum est esse B, ad A, Igitur vt B, ad A, ita B minus E, ad A minus D, hoc est A, ad E ex hypothesi. Sunt igitur tres proportionales B, A, E.

Nunc cum sit vt B, ad A, ita A minus E, ad E minus D, erit vt A, ad E, ita A minus E, ad E minus D, & permutando & dividendo, vt E, ad A minus E, ita D, ad E minus D, & rursus permutando, vt E, ad D, ita A minus E, ad E minus D,

B
A
E
D

D, hoc est A, ad E, ex ostensis. Tres igitur A, *E*, D, sunt etiam in continuâ proportione, & consequenter quatuor BA ED sunt continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TERTIA

Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.

SInt datæ rectæ AB maior, AD minor, & ex illis, vt prius, rectangulum ABCD, circa quod descriptus intelligatur circulus. Tum producta BA in I, donec AI sit quadrupla AB, secetur AB in H, itaut rectangulum IHA, sit æquale quadruplo rectanguli ABCD: & sumptâ IR æquali AH, erectâque HK dimidiâ AH, iungatur KA, & producatur donec occurrat normali RG in G. Tum latere transverso GK, vertice K, latere vero recto transversi subquintuplo describatur Semi-hyberbole EK, cuius applicatę ad diametrum KC, sint parallelæ KH. Illa vtique secabit circulum. Secet in puncto F, ex quo applicetur FO, ac producatur donec occurrat AB in Q; occurret etiam DC in X.

Dico quatuor BA, QF, QA, AD, esse continue proportionales.

Rectangulum enim GOK, ad rectangulum RQH, rationem habet compositam ex ratione GO, ad RQ (sive ob similitudinem triangulorum ARG, *O*AQ, K*A*H) ex ratione KA, ad *A*H, & ex ratione OK, ad HQ, hoc est eiusdem K*A* ad eandem *A*H. hæ vero duæ rationes, componunt rationem quadrati K*A*, ad quadratum *A*H, Igitur vt quadratum

tum AK ad quadratum AH, ita rectangulum GOK ad rectangulum RQH. Sed cum AH sit dupla HK, erit quadratũ AH, quadruplum quadrati HK, & consequenter quadratum AK, quod æquale est vtrique AH, HK, erit sesquiquartum quadrati AH; Igitur rectangulum GOK erit etiam sesquiquartum rectanguli RQH sive vt 5 ad 4; Idem autem rectangulum GOK, ad quadum OF, est vt latus transversum ad rectum, sive vt 5 ad 1, ex constructione; Igitur rectangulũ GQH, ad quadratum OF erit vt 4 ad 1. Sed rectangulam RQH, est æquale rectangulo IQA, minus rectangulo IHA. * Itaque rectangulum IQA sive IAQ cum quadrato AQ) minus rectangulo IHA, erit quadruplum quadrati OF. Sed rectangulum IQA, quadruplum est rectanguli BAQ ex constructione, cum AI posita sit quadrupla BA; & quadratum AQ, quadruplum est quadrati QO, cum AQ sit eiusdem dupla, sive vt AH ad HK, similiter rectangulum IHA quadruplum est rectanguli ABCD, ex constructione' Igitur additis & demptis partibus in eadem ratione, rectangulum IQA, cum quadrato AQ, minus rectangulo IHA, quadrupla erunt rectanguli BAQ, cum quadrato QO, minus rectangulo ABCD. Cum autem ostensum sit rectangulum IQA cum quadrato AQ minus rectanglo IHA, quadruplũ etiam esse quadrati OF, sequitur rectangulum BAQ, cum quadrato QO, minus rectangulo ABCD, æquale esse eidem quadrato OF. Sed quadratum OF, æquale est duobus quadratis FQ, OQ, minus rectangulo sub FQ & dupla OQ, hoc est minus rectangulo FQA; Igitur ablato vtrimque quadrato OQ, rectangulum BAQ, minus rectangulo ABCD, æquale erit quadrato FQ, minus rectangulo FQA. Est autem rectangulum BAQ minus rectangulo ABCD, æquale rectangulo sub AB, & AQ minus CD; quadratum vero FQ minus rectangulo EQA, æquatur rectangulo ex FQ, in FQ minus AQ, erit igitur vt BA, ad QF, ita FQ minus AQ ad AQ minus

*p. lemm. 4tum.

nus

AD. Sed cum rectangulum BQA, sit æquale rectangulo QFX (ob circulum) est etiam vt QF, ad QA, ita BQ sive BA minus AQ ad FX, (sive FQ minus OX, vel AB.) Igitur quatuor rectæ BA, QF, QA, AD, habent conditiones lemmatis septimi, suntque continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

LEMMA OCTAVVM

Si fuerint quatuor rectæ B, A, E, D, fueritque vt B, ad A, ita E, ad D, & vt A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erunt illæ in continuâ analogiâ.

CVm enim sit vt B, ad A, ita E, ad D, erit permutãdo & dividendo vt B minus E, ad E, ita A minus D, ad D, & rursus permutando, vt B minus E, ad A minus D, ita E, ad D. Sed vt B minus E, ad A minus D, ita etiam est exhypothesi A, ad E: Igitur vt A, ad E, ita E, ad D, est autem pariter exhypothesi vt E, ad D, ita B ad A; itaque vt B ad A, ita A, ad E, & E, ad D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QVARTA.

Cubum cubi duplum invenire, sive inter extremas datas in ratione duplâ duas medio loco proportionales exhibere.

SInt datæ recte AB, eiusdemque dupla BC. & facto ex ijs rectangulo ABCD, descriptoque circa illud circulo, dividantur AB, BC, bifariam in M & P, & iungatur PM occurrens DA productæ in I, & IQ producatur in directum, donec eidem sit æqualis PA. Tum ad IH, productâ DC in

N; fiat Ellipsis cuius diameter sit IH, vna applicatarum D N, quæ vtique secabit circulum, secet in *E*, ex quo cadat normalis EF. Dico quatuor DA, EF, FB, B A, esse in continuâ proportione.

Cadat ex H normalis HK in AD productam, & ducatur M O, parallela B C, occurrens E F in O, & ad MO ducatur PQ, parallela AB, tum producatur EF, donec occurrat I H, in G, erit GF applicata ad diametrum IH, ex constructione,

Patet nunc, cum anguli ad A & B, sint recti & Anguli, IMA, BMP, æquales, triãgula IAM, BPM, esse æquiangula, Cum vero B M, sit æqualis M A, rectas BP, I A, fore etiam æquales. Patet etiam ob eandem rationem, trangulum P CN, esse æquiangulum triangulo PBM, & cum PB, PC, sint æquales ex constructione, C N, æquari BM, & PM ipsi PN, cum vero æquales sint etiam IP, PH, demptis æqualibus PM, PN, remanere æquales IM, A N. Cum autem sit vt I M ad NH, ita I A, ad DK (ob parallelas A M, D N, K H) sequitur rectas AI, DK, etiam esse æquales, & cum AI, sit dupla AM, erit etiam I D, dupla DN, IL dupla LG, & M *O* dupla *O* G.

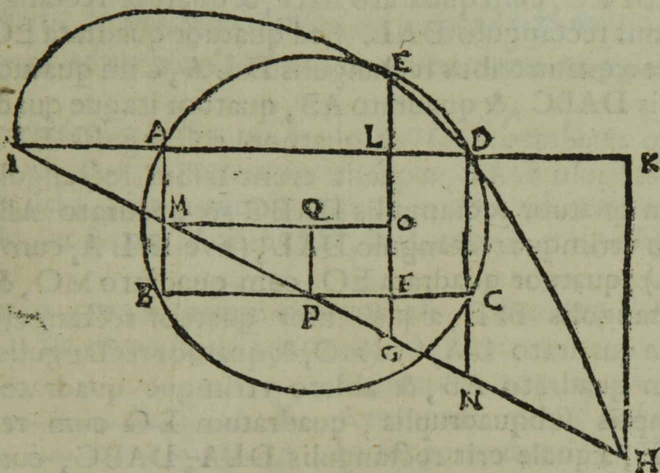
Nunc, vt quadratum DN ad quadratum EG, ita rectangulum INH, ad rectangulum IG H (ob ellipsim) Ratio vero rectanguli IN H, ad rectangulum I G H, componitur ex ratione NI, ad IG (sive DI, ad IL) & ex ratione H N ad H G (sive *K*D, ad KL) hę veró duæ rationes, componunt rationem rectanguli KDI, ad rectangulum K L I; Igitur vt quadratum DN, ad quadratum E G, ita rectangulum KDI, ad rectangulum KL I, & permutando vt quadratum ND, ad rectangulum K D I, ita quadratum E G, ad rectangulum K LI.

Rursus ratio quadrati D N, ad rectangulum K D I, componitur ex ratione DN, ad DI, siue 1 ad 2, & ex ratione eiusdem DN ad D K sive D C, hoc est 3 ad 2, ex his vero rationibus componitur ratio 3 ad 4; Igitur vt 3, ad 4, ita quadra-

tum

tum DN, ad rectangulum I D K, hoc est ita quadratum E G, ad rectangulum ILK. Tria igitur rectangula ILK, æquantur quatuor quadratis EG.

Vlterius cum rectangulum IKL, sit æquale duobus rectangulis DLA, KDI *) tria rectangula IL K, æqualia erunt * p. lemm. 9. ult.



tribus rectangulis DLA, vna cum tribus KDI. Sed cum D I sit tripla K D, rectangulum KDI, erit æquale triplo quadrato KD, (siue AB) & triplum rectangulum KDI, 9 quadratis AB, hoc est, cum C B sit dupla B A, quatuor rectangulis D A B C, cum quadrato AB: Igitur tria rectangula I L K, æqualia erunt tribus rectangulis D L A, vna cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA. At cum tria rectangula ILK, ostensa sint æqualia quatuor quadratis E G, sequitur tria rectangula DLA, vna cum quatuor rectangulis D A B C, & quadrato B A, equalia esse eidem quadrato E G quater sumpto. Sed quadratum EG, æquatur quadratis GO, & OE, cum rectangulo G O E bis, hoc est cum vnico MOE; Igitur quadruplum quadratum E G, æquabitur quatuor quadratis G O (siue vnico quadrato MO) cum quatuor quadratis O E,

 & qua-

tuor rectangulis MOE. Quatuor vero rectangula MOE, æqualia sunt quatuor rectangulis MO, sive BF, in F E, minus quatuor rectangulis MOF, hoc est (cum MO sit æqualis AL, & AD quadrupla OF, ex constructione) minus rectangulo DAL. Igitur quatuor quadrata EG, æqualia erunt quatuor quadratis EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minus rectangulo DAL. Sed quatuor quadrata EG, ostensa sunt æqualia tribus rectangulis D L A, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB, quatuor itaque quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minns rectangulo DAL, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB. Et addito vtrimque rectangulo DAL, (sive D L A, cum quadrato LA), quatuor quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, æquabuntur quatuor rectangulis DLA, cum quadrato L A, sive MO, & quatuor rectangulis D ABC, cum quadrato AB, & ablato vtrimque quadrato MO, ac sumptis subquadruplis, quadratum E O cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulis DLA, DABC, cum quartâ parte quadrati AB (hoc est cum quadrato OF). Sed rectangulum DLA, æquale est rectangulo FEL, ob circulum, rectangulum vero FEL, cum quadrato OF, æquale est quadrato EO. Igitur quadratum EO, cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulo DABC, cum quadrato EO; & ablato vtrimque quadrato EO, remanebit rectangulum BFE, æquale rectangulo ABCD; eritque vt CB, ad EF, ita FB, ad BA, sive FL.

Sed cum rectangulum CFB, sit æquale rectangulo FEL, (ob circulum) est etiam vt E F ad FB, ita C F (sive C B minus BF (ad EL (sive E F minus FL;) Quatuor igitur rectæ C B, EF, FB, FL habent conditiones lemmatis octavi. Sunt igitur in continuâ proportione, & consequenter etiam ipsis æquales DA, EF, FB, BA. Quod erat demonstrandum.

LEM

LEMMA NONVM

In quatuor rectis B, A, E, D, si fuerit vt prima cum secundâ, ad secundam cum tertiâ, ita tertia ad quartam. & rursus vt prima minus tertiâ, ad secundam minus quartâ, ita secunda ad tertiam, erunt illæ in continuâ analogiâ.

CVm enim sit vt B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, exhypothesi, erit permutando, & dividendo, vt B cum *A* minus E, ad E, ita A cum E minus D, ad D, & rursus permutando, vt B cum *A* minus E, ad A cum E minus D, ita E, ad D.

Vlterius, cum sit etiam exhypothesi, vt *B* minus E, ad A minus D, ita A, ad E, erit permutando, & componendo, vt *B* minus E cum A, ad A, ita A minus D cum E, ad E, & rursus permutando, vt *B* minus E cum A, ad A minus D cum E, ita A ad E. Sed vt *B* cum A minus E, ad A cum *E* minus D, ita ostensum est esse *E*, ad D; igitur vt A, ad E, ita *E*, ad D.

B
A
E
D

Nunc exhypothesi, est vt *B* cum A, ad A cum E, ita E, ad D, erit igitur vt *B* cum A, ad A cum *E*, ita *A*, ad E: & permutando, ac dividendo, vt *B*, ad *A*, ita *A*, ad *E*, sed vt *A*, ad *E*, ita est etiam E, ad D. Quatuor igitur *B*, *A*, E, D, sunt in continuâ proportione. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QVINTA

Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.

DAtæ sint extremæ *AB*, maior *AC*, minor, & ex illis, vt prius rectangulum *ACBD*, & circa illud circulus. Secetur *A*D, in G, ita vt *A*G, sit æqualis *A*C, productáque D *A*, in K, donec *A*K, sit æqualis *A*G, fiat G I, normalis ad *A* D, æqualis GK, quæ versus G indefinitè producatur, tum iunctá KI, & productâ etiam indefinitè á parte I, vt in M; sumatur in *AD*, recta *AH*, media proportionalis inter D*A*, G*A* vel *AC*, & circa asymptotos GI, IM, describatur Hyperbola transiens per punctum H, quæ secabit circulum a parte G, vt patet, secet in puncto E; ex quo cadat in *AD*, normalis EF, secans C*B*, in O.

Dico quatuor D*A*, E*F*, *FA*, *A*C, esse continue proportionales.

Producatur E*F*, ad KI, in N, & eidem parallela ducatur HM: Tum ex puncto E, in IG productam, cadat normalis EL, quæ vtique erit parallela & æqualis *F*G: & cum K G GI, sint æquales, ex constructione, erunt etiam æquales K*F*, *F*N, & KH, HM.

Nunc, cum duo puncta H, & E, sint in Hyperbolâ, ductæque sint ad asymptotos parallelæ HG, EL, itemque HM, EN, erit rectangulum MHG, æquale rectangulo NEL. Sed rectangulum MHG, est æquale rectangulo KHG, rectangulum vero NEL, est æquale rectangulo NFG (sive KFG,) vna cum rectangulo E*F*G. Igitur rectangulum KHG, est æquale rectangulis K*F*G, E*F*G. Et addito vtrimque quadrato G*A*, rectangulum KHG, cum quadrato GA, erit equalæ rectangulis KFG, E*F*G, cum quadrato G*A*. Sed rectangulum KHG cum quadrato GA, æquale est quadrato AH, & rectangulum KFG cum quadrato GA, similiter est æquale quadrato A*F*; Itaque quadratum AH, erit equale quadrato *AF*, cum rectangulo EFG, & cum *A*H, ex constructione, sit media inter D*A*, *A*C, ideoque eius quadratum æquale sit rectangulo *ACBD*; sequitur rectangulum AC*B*D, æquale esse

qua-

quadrato *AF*, & rectangulo EFG: &, addito vtrimque rectangulo *A*GL, rectangulum AC*B*D cum rectangulo AGL, fore æquale quadrato *AF*, cum rectangulis AGL, EFG, hoc eſt cum vnico rectãgulo *A*FE. Sed cum *A*G, ſit æqualis AC, ex conſtructione, rectangulum *A*C*B*D, vna cum rectangulo *A*GL, æquale erit rectangulo ex *A*C in *A*D, cum GL ſive FE, & ſimiliter quadratum *A F* cum rectangulo *A*FE, æquale erit rectangulo ex AF, in *A*F vna cum EF. Igitur rectangulum ex AC, in AD cum FE, æquale erit rectangulo ex *A*F, in *A*F cum FE, & conſequenter erit eadem ratio D*A* cum FE, ad FE cum AF, quæ eſt *A F*, ad *A*C.

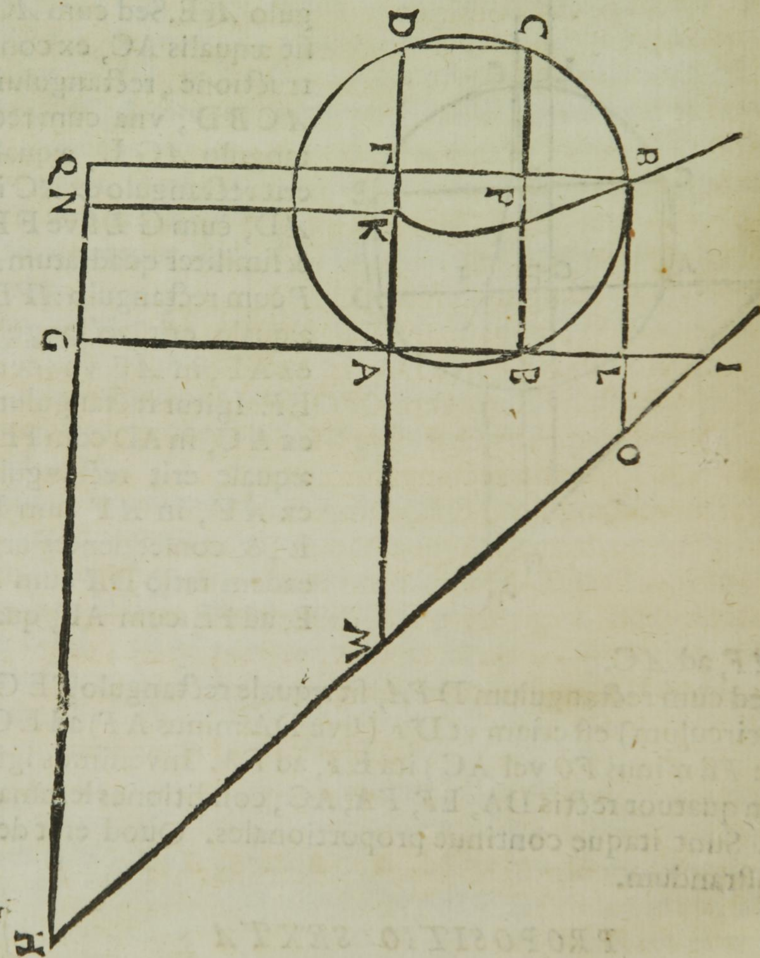
Sed cum rectangulum D *FA*, ſit æquale rectangulo *F*E O, (ob circulum) eſt etiam vt D *F* (ſive DA minus A *F*) ad E O (ſive *F*E minus *FO* vel AC) ita E *F*, ad *F*A. Invenimus igitur in quatuor rectis DA, EF, *F*A, AC, conditiones lemmatis 9. Sunt itaque continue proportionales. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEXTA

Idem alio modo efficere.

ſint

Sint duæ datæ A D maior, A *B* minor, & rursus ex illis rectangulum, circa quod describatur circulus A *B* C D;



Tum productâ *BA*, vtrimque in *G*, & I, donec I A, A*G*, sint æquales A D, ducatur *G*H, parallela A D, & eiusdem dupla, & iun-

gatur *H* I, ſumptâque A *K*, æquali A *B*, circa aſympotos H*G*, H I, deſcribatur Hyperbola tranſiens per punctum K, quæ á parte I, ſecet circulum in E.

Dico, demiſſâ normali EF, ſecante C*B* in P, quatuor AD, EF, FA, A*B*, eſſe continue proportionales.

Cadat ex *K*, in H*G* productam normalis *K*N, & ex *E*, in I*G*, normalis EL, quæ producta ſecet HL, in O, & producatur EF, donec occurrat H*G*, ſimiliter productæ, in Q, & DA, donec HI, occurrat in M. Patet AM, fore ſubduplam *G*H, hoc eſt æqualem DA, vel *G*A, vel *A* I.

Et quoniam EO, *K*M, itemque *E* Q, *K*N, ſunt parallelæ, & ex punctis *K* & E, in hyperbolâ ſumptis cadunt in aſymptotos, erunt rectangula N*K*M, Q*E*O, æqualia. Sed rectangulum N*K*M, æquatur rectangulo N*K*A (ſive DA*K*) & rectangulo ſub NK, ſive DA, in AM (hoc eſt quadrato *G*A, vel AI) Rectangulum vero QEO, æquale eſt rectangulo QEL, & rectangulo ex Q*E*, ſive *G*L, in LO (vel LI, ob æquales H*G*, *G*I) Igitur rectangulum DAK, cum quadrato IA, æquatur rectangulo QEL, cum rectangulo GLI, & addito vtrimque quadrato LA, quadratum IA, cum rectangulo DA*K*, & quadrato LA, æquabitur rectangulo Q*E*L, cum rectangulo IL*G*, & quadrato LA, (hoc eſt cum quadrato IA). *Et* dempto vtrimque quadrato IA, rectangulum DA*K*, cum quadrato LA, æquabitur rectangulo QEL. Et ablato vtrimque rectangulo DA*K*, Quadratum LA, erit æquale rectangulo QEL, minus rectangulo DA*K*. Sed rectangulum QEL, æquale eſt duobus rectangulis QFA, FEL; Igitur ablato vtrimque rectangulo FEL, quadratum LA (ſive FE) minus rectangulo FEL, æquabitur rectangulo Q*F*A, (ſive *B*AF,) minus rectangulo DAK. Sed quadratum FE, minus rectangulo *F*EL, æquatur rectangulo ſub EF, & differentiâ EF, EL, rectangulum vero DAF, minus rectangulo DA*K*, æquatur rectangulo ſub AD, & differentiâ ipſarum *F*A, A*K*, (ſive

(five FA, AB). Erit igitur vt DA, ad FE, ita EF minus EL, (hoc eſt minus FA) ad FA minus AB.

Sed, ob circulum, rectangulum FEP, æquale eſt rectangulo AFD, eſtque vt EF, ad FA, ita DF, (ſive DA minus AF,) ad EP (hoc eſt EF minus FP, vel AB,) Quatuor igitur rectæ DA, FE, FA, AB, habent conditiones lemmatis 9. ideoque ſunt in continuâ proportione. Quod erat demonſtrandum.

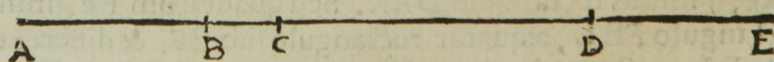
DE PROBLEMATVM SOLIDORVM CONSTRVCTIONE

PER EASDEM LINEAS

IISDEM INFINITIS MODIS

QVomodo æquationum cubicarum varietas ad tres omnino formulas reducatur, iam ab alijs oſtenſum eſt: Affectas ſcilicet ſub latere affirmatiuè, vel negatiuè, & amphibolas. Illas per totidem problemata, ſuperiori methodo, conſtruemus, quamuis duarum mediarum inuentione, & anguli triſectione, non ignoremus remfortaſſe breuius abſolui potuiſſe. Sed methodi varietatem & amplitudinem, ſic oſtendere maluimus; quam qui perceperit, facilè ad aliorum Problematum caſus, etiam in quibus affectio ſub quadrato eſt, non difficulter applicabit.

LEMMA DECIMVM



In rectâ EA, ſi fuerit vt EA, ad AD, ita CA, ad AB;

erit

vt EA, ad AD, ita rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC, in BD.

CVm enim sit vt EA ad AD, ita CA, ad AB; erit permutando, vt EA, ad CA, ita AD, ad AB; & diuidendo, vt EC, ad CA, ita DB, ad BA: rectangulum igitur ex DB, in CA, æquale erit rectangulo ex EC, in BA. Sed vt AB ad AC, ita (sumptâ communi altitudine EC) rectangulum ex BA in EC, ad rectangulum ACE: Igitur vt BA, ad AC, ita rectangulum ex DB in CA, ad rectangulum ACE, sive vt rectangulum ACE, ad rectangulum ex DB in CA, ita CA, ad AB, hoc est, ex hypothesi, EA ad AD. Quod erat demonstrandum.

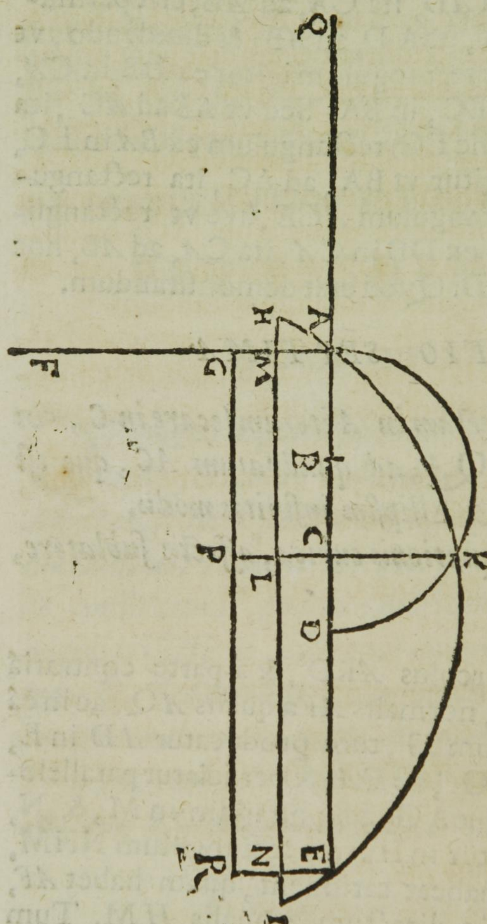
PROPOSITIO SEPTIMA.

Lineam datam QD, sectam in A iterum secare in C, vt sit eadem ratio quadrati QA, ad quadratum AC, que est AC ad CD; per circulum & Ellipsim infinitis modis.

Est autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ sublatere, affirmatiuè.

FIat super AD, semicirculus AKD, & á parte contrariâ erigatur in puncto A, normalis AF æqualis AQ, ac in eâ sumatur quodlibet punctum G, tum producatur AD in E, donec AD, sit ad AE, vt GF, ad FA; & perficiatur parallelogrãmum GAER, diuisisque AG, ER, bifariam in M, & N, iungatur NM, & producatur in H, itaut rectangulum NHM, ad quadratum MA, eam habeat rationem, quam habet AF, ad FG, sumaturque NI in directum, æqualis HM. Tum axe HI, latere recto quod ad HI eandem habeat rationem, quæ est FG, ad FA, describatur semi-ellipsis HAKI. Quæ transibit per A, & E, vt patet ex constructione, secabitque

circulum in aliquo puncto vt K. Cadat ex illo in AD normalis KC.



Dico ita esse quadratum QA, ad quadratum CA, vt AC, ad CD. Producatur KC, vsque dum secet rectas NM, GR, in L & P. fiatque vt EA, ad DA, ita CA ad AB.

Exijs, quæ proportione primá ostensa sunt, eadem est ratio rectanguli ECA, ad rectangulū PKC, quæ lateris transuersi ellipseos ad rectum, siue AF, ad FG, hoc est EA, ad AD (ex constructione). Sed ex lemmate 10. vt EA, ad AD, ita rectangulum ECA, ad rectangulum ex AC, in BD; rectangulum igitur ex AC in BD, æquale erit rectāgulo PKC. Sed rectangulum ex AC, in BD, æquatur duobus rectāgulis ACB, DCA; rectangulū vero PKC, æquale est rectangulo PCK, vna cum quadrato CK: duo igitur rectangula ACB, DCA, æqualia sunt rectangulo PCK,

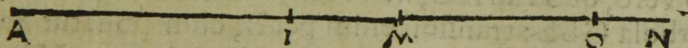
cum

cum quadrato CK. Sed rectangulum DCA, est etiam æquale quadrato CK, (ob circulum.) Igitur, demptis æqualibus, remanebunt æqualia rectangula ACB, PCK, eritque vt PC ad CB, ita CA, ad CK. Sed cum sit vt AF, ad FG, ita EA, ad AD, sive CA, ad AB, (ex constructione) erit per conversionem rationis, vt AF, ad AG (sive CP) ita CA, ad CB, & permutando, vt AF, ad CA, ita CP, ad CB. Sed ex ostensis vt CP, ad CB, ita CA, ad CK. Igitur vt AF, ad CA, ita CA, ad CK. Tres igitur AF (sive AQ) AC, CK, sunt in continua proportione. Estque vt quadratum AQ, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad quadratum CK, hoc est (ob circulum) AC ad CD. Quod erat demonstrandum.

Idem accideret si in rectâ AF, in infinitum productâ vltra F, sumeretur punctum G. Non enim difficilior est demonstratio, quam, vt in propositione primâ, lectoris ingenio relinquimus.

Construximus itaque Problema, per circulum & Ellipsim, infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA VNDECIMVM



In rectâ AN sectâ in punctis I, M, O, si fuerit vt AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit vt AM, ad MN, ita rectangulum AOM, ad rectangulum sub NI & OM.

CVm enim sit vt AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit permutando, vt AM, ad OM, ita MN, ad MI, & componendo, vt AO, ad MO, ita NI, ad MI, & rursus permutando, vt AO, ad NI, ita MO, ad MI. Sed vt MO, ad MI, ita est (ex

(ex hypotheſi) AM, ad MN: Igitur vt AM, ad MN, ita AO, ad NI; & ſumptá communi altitudine OM, ita rectangulum AOM, ad rectangulum ex NI, in OM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Idem, infinitis modis, per circulum & Hyperbolam abſoluere.

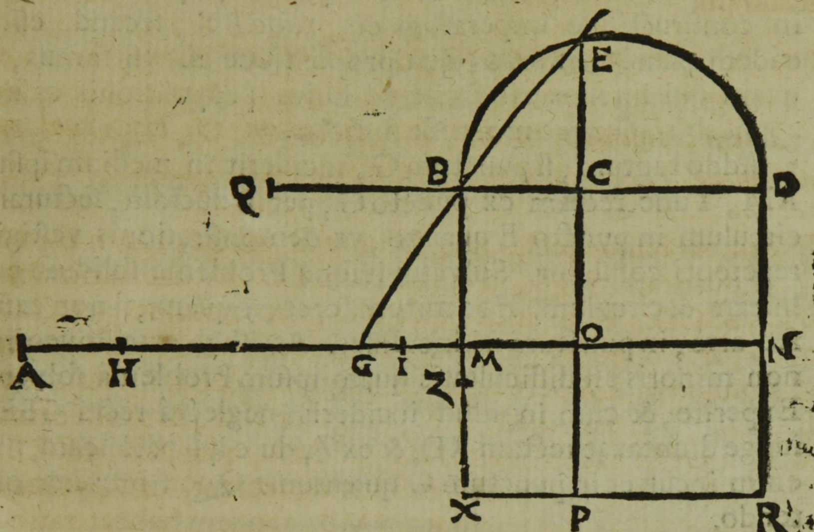
DEtur itaque recta QD, ſecta in B, ita ſecanda in C, vt quadratum QB, ad quadratum BC, habeat rationem BC, ad CD. Fiat rurſus ſuper *B* D, ſemicirculus, erectaque á parte oppoſitâ, normalis BZ, æqualis *B*Q, producatur vt cumque in X; & perficiatur rectangulum XBDR; ſectisque BX, DR, bifariam in M, & N, iungatur NM, & producatur in A, ita vt ſit eadem ratio NM, ad MA, quæ XZ, ad ZB. Tum (ſiquidem fieri poſſit) recta *A*M, ſecetur, in G, vt rectangulum AGM, ad quadratum MB, eandem habeat rationem, quam habet BZ, ad ZX; & ipſi MG, ſumatur æqualis AH. Demum, axe HN, vertice G, latere tranſuerſo HG, recto vero, quod ad *H*G, ſit vt XZ, ad ZB, deſcribatur ſemihyperbola GBE: tranſibit enim per *B*, cum ponatur eadem ratio rectanguli AGM, vel HMG, ad quadratum M*B*, quæ BZ, ad ZX, ſive lateris tranſuerſi, ad rectum: ſecabit etiam circulum in E, ex quo cadat in BD normalis EC.

*D*ico eſſe vt quadratum Q*B*, ad quadratum BC, ita BC, ad C*D*.

Producatur *E* C, vſque dum ſecet parallelas M N, X R in punctis O, & P. Tum fiat vt *A*M, ad MN, ita *O* M, ad MI.

Exijs quæ propoſitione 2. oſtenſa ſunt, rectangulum AOM, ad rectangulumPEC, eandem habet rationem, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum; ſive *B*Z, ad ZX, vel AM, ad MN,

MN, (ex constructione). Sed eandem etiam rationem habet idem rectangulum AOM, ad rectangulum sub NI, OM,* Igitur rectangulum sub NI, & OM, æquale erit rectangulo, *lemm: II.



PEC. Est autem rectangulum sub NI, & OM, æquale duobus rectangulis NOM, IOM rectangulum vero PEC, rectangulo PCE, vna cum quadrato CE. Igitur rectangulum NOM, (vel BCD,) cum rectangulo IOM, æquale est rectangulo PCE, cum quadrato CE. Sed rectangulum BCD, est etiam æquale quadrato CE (ob circulum:) Igitur ablatis hinc inde æqualibus BCD rectangulo, & CE quadrato, remanebunt æqualia rectangula, IOM, PCE. Eritque vt PC, ad OI, ita MO, (vel CB,) ad CE.

Nunc (ex constructione) vt XZ, ad ZB, ita NM ad MA, vel IM, ad MO: erit igitur componendo, vt XB, ad BZ, ita IO, ad MO, & permutando, vt XB, (vel PC,) ad IO, ita BZ, (vel BQ,) ad MO, vel BC.

Sed vt PC, ad IO, ita iam demonstratum est esse CB, ad CE;

CE; igitur vt BQ ad BC, ita BC, ad CE, & vt quadratum BQ, ad quadratum BC, ita quadratum BC, ad quadratum CE, hoc eſt (ob circulum) ita BC, ad CD. Quod erat &c.

Si recta AM, ita ſecari non poſſet, quemadmodum in conſtructione imperatum eſt, tunc BX, ſecanda eſſet, eâdem plane methodo, qua propoſitione 2. vſi ſumus, & quam qui intellexerit facile ad huius propoſitionis caſum applicabit: ideoque monuiſſe ſufficiat.

Addo tantum, ſi punctum G, inciderit in medium ipſius AM, Tunc rectam ex puncto G, per B ductam, ſecturam circulum in puncto E quæſito, vt demonſtrationis veſtigia repetenti conſtabit. Solvetur itaque Problema ſolidum per lineam & circulum. Hoc mirum foret, inquam, ſi non caſu, ſed arte, in punctum X incidiſſes. At illud arte invenire, non minoris eſt difficultatis quam ipſum Problema ſolvere. Experire, & cum in illud incideris (neglectâ rectâ GBE) iunge dumtaxat rectam XD, & ex Z, du c ipſi paralleam, illa enim incurret in punctum C quæſitum. Quod breviter oſtendo.

Quoniam punctum G, biſecat rectam AM (ex Hypotheſi) erit rectangulum AGM, pars quarta quadrati AM. Ponitur autem ita eſſe BZ, ad ZX, vt rectangulum AGM, ad quadratum BM: Igitur ſumptis conſequentium quadruplis erit vt BZ, ad ZX, ita quadratum AM, ad quadratum BX. Sed vt BZ, ad ZX, ita AM, ad MN (ex conſtructione): igitur vt quadratum AM, ad quadratum BX, ita AM, ad MN, ſunt itaque tres proportionales AM, BX, MN vel BD: Eſtque rurſus vt AM, ad MN, vel BD, ita quadratum BX, ad quadratum BD, hoc eſt (cum ZC, ponatur parallela XD,) ita quadratum BZ, ad quadratum BC. Sed vt AM, ad MN, ita, rurſus, ex conſtructione, BZ, ad ZX, hoc eſt (ob parallelas XD, ZC,) ita BC, ad CD. Igitur vt quadratum BZ, (vel BQ) ad quadratum BC, ita BC, ad CD. Quod erat &c.

conſ.

Construximus itaque Problema per circulum & *Hyper*bolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO NONA.

Datis duabus rectis Z, & Q, invenire tertiam vt X, ad cuius quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ est ipsius X, ad vtramque Q & X. Est autem paradigma æquationis, cubicæ affectæ sub latere negativè.

SVmatur FN, æqualis Q, & erigatur FH, dupla Z, bisecta in G. Tum in rectâ GF, (vel eadem versus F in infinitum productâ) sumpto quolibet puncto A, ducatur AD parallela & æqualis FN, & secetur vel producatur in *E*, itavt sit eadem ratio AD, ad AE, quæ est A*G*, ad *G*H, perfectoque rectangulo HAES, bisecentur rectæ AH, ES, in T, & V, ductaque TV, producatur in R, itavt rectangulum TRV, ad quadratum VE, eandem habeat rationem, quam H*G*, ad *G*A & productâ

Z
Q
X

VT, in Y, donec TY, sit æqualis VR, super axe YR, describatur semi-ellipsis YIR, in quâ ratio lateris transversi ad rectum, sit eadem quæ HG, ad *G*A; transibit illa per *A*, & E, (ex constructione) & secabit circulum, vel supra, vel infra N, vel in ipso puncto N. Secet primo supra, in puncto I, & ex I, demittatur in *F*N, normalis I*K*.

Dico *FK*, æqualem esse linæ X, quæsitæ; sive ita esse quadratum F*G*, ad quadratum FK, vt F*K*, ad duas FN, FK.

Producatur I*K*, vsque dum secet parallelas AE, TV, HS, in C, L, M. Fiatque vt *E*A, ad DA, ita CA, ad *B*A.

Nunc (ob ellipsim) eadem erit ratio rectanguli *E*CA, ad

E rectan-

rectangulum MIC, quæ est lateris transversi ad rectum, sive HG, ad GA, vel EA, ad DA, (ex constructione): Sed vt EA, ad DA, ita rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC in BD*: Igitur rectangulum ex AC, in BD, æquale erit rectan-

* p. lemm: 10.

gulo MIC. Sed rectangulum ex AC, in BD, æquale est duobus rectangulis DCA, ACB: rectangulum vero MIC, duobus MIK, & MI in KC. Itaque duo rectangula DCA, ACB, erunt æqualia duobus MIK, & MI in KC; & cum rectangulum DCA sive PMH, sit æquale rectangulo MIK, (ob circulum): ablatis æqualibus, remanebunt æqualia, rectangula ACB, MI, KC: Eritque vt KC, ad CB, ita CA, ad MI.

Nunc, vt HG, sive FG, ad GA, ita EA, ad DA, & CA, ad AB (ex constructione) Igitur per conversionem rationis vt FG, ad FA, (sive KC), ita CA, ad CB: & permutando, vt FG, ad CA, ita KC, ad CB. Sed vt KC, ad CB, ita ostensum est esse, AC, ad IM; Igitur vt FG, ad CA, ita CA, ad IM; & vt quadratum FG, ad quadratum CA, ita quadratum CA, ad quadratum IM (sive ad duo rectangula MIK, IMK). Sed vlterius cum tres FG, CA, IM, demonstratæ sint proportionales, rectangulum sub FG, IM, erit æquale quadrato CA, & sump-

& ſumptis duplis rectangulum ſub duplâ FG (hoc eſt *FH* vel KM ex conſtructione) in IM, æquabitur duplo quadrato *A*C, Rectangulum vero MI*K*, æquale etiam eſt rectangulo DC*A*, Igitur additis æqualibus rectangulum DCA, cum duplo quadrato AC, æquale eſt duobus rectangulis IMK, MIK; & cum rectangulum DCA, cum duplo quadrato CA, æquetur rectangulo DAC, cum quadrato AC, rectangulum DAC cum quadrato AC, æquale erit duobus rectangulis IMK, MIK, ſive quadrato IM.

Demonſtratum vero eſt, eſſe vt quadratum F*G*, ad quadratum *A*C, ita quadratum AC, ad quadratum IM. Erit igitur ſimiliter vt quadratum F*G*, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad rectangulum DAC cum quadrato *A*C, hoc eſt (dempta communi altitudine *A*C) ita recta *A*C, ad duas DA, AC. *Et* conſequenter vt quadratum *F*G, ad quadratum FK, ita *F*K, ad duas FN, FK. Quod erat demonſtrandum.

Si punctum I, caderet infra N, normalis ex I in *F*N productam, daret rectam quæſitam, vt prius; cuius demonſtratio ſuperiori ſimilis eſt.

Si vero tranſiret per N, tum ipſa FN eſſe recta quæſita. Quo caſu patet quadratum rectæ GF, ſubduplum eſſe quadrati rectæ FN. Itaque ex his datis ſolvi poteſt problema ſine vlla conſtructione. Quod fuſius perſequi noſtri non eſt inſtituti.

Eadem eſſet demonſtratio ſi punctum *A* vltra F, in GF productâ ſumptum eſſet, vt conſideranti planum fiet.

Conſtruximus itaque Problema per circulum & Ellipſim infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO DECIMA

Propoſitum ſit idem per circulum & Hyperbolam infinitis modis abſolvere.

SInt, eadem quæ prius, rectangulum HFNP, & circa illud circulus: bisectâque NP, in A, sumatur vltra A, quodlibet punctum G, & perficiatur rectangulum GPHY bisectisque etiam GP, in B, & YH, in O, iungatur AO, & ita producatur vsque ad E, vt sit eadem ratio BE, ad *BO*, quæ est PA, ad AG: Tum secetur *BE*, in D, itavt rectangulum ED*B*, ad quadratum *BG*, habeat rationem PA, ad AG; & sumatur EQ, æqualis *BD*. Demum vertice D, latere transverso DQ, axe DO, describatur Hyperbola, cuius latus transversum ad rectum, sit in ratione P*A*, ad AG; & quæ occurrat circulo in puncto I, (occurret enim, & transibit per punctum G, vt patet ex constructione:) cadat ex I, in *HB*, normalis IM, secans rectas *F*N, YG, OB, in punctis K, C, L.

Dico NK, esse lineam quæsitam; sive ita esse quadratum AN, ad quadratum *NK*, vt est NK, ad vtramque simul NK, N*F*.

Fiat vt EB, ad *BO*, ita L B, ad *B*S.

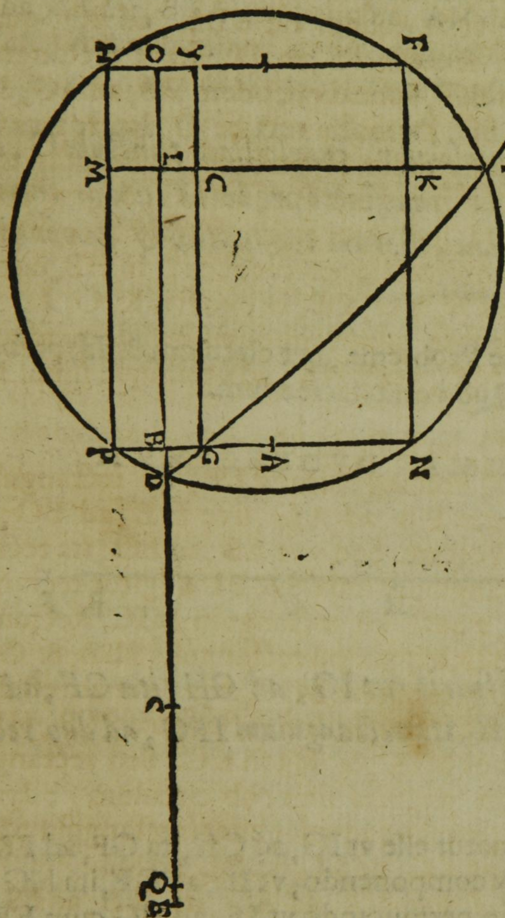
Ex ante ostensis, rectangulum ELB, ad rectangnlum MIC, habet rationem P A, ad A G, sive E B, ad BO, vel lateris transversi ad rectum. Sed ÷ vt EB, ad BO, ita rectangulum EL*B*, ad rectangulum sub *O*S & BL * Igitur rectangulum sub OS, & BL, æquale est rectangulo MIC. Rectangulum vero sub *O*S, & BL, æquale est rectangulis SLB, & OLB (sive HMP) rectangulum autem MIC, æquale etiam est duobus MIK, & MI in KC. Itaque duo rectangula SLB, HMP æqualia erunt duobus MIK, & MI in KC. Sed rectangula HMP, MIK, etiam æqualia sunt (ob circulum): Igitur demptis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula SL*B*, MI in KC, eritque vt KC, ad SL, ita BL, ad MI.

*p. lemm: 11.

Vlterius, est vt P*A*, sive NA, ad AG, ita, LB, ad *BS* (ex constructione,) erit igitur componendo, vt NG, ad AG, ita LS, ad *BS*, & per conversionem rationis, vt NG, sive KC, ad N*A*, ita SL, ad LB, & permutando, vt KC, ad SL ita NA, ad

LB.

LB. Sed vt KC, ad SL, ita ostensum est esse LB, ad MI; Igitur vt NA, ad LB, ita LB, ad MI; Et vt quadratum NA ad quadratũ LB, ita quadratum LB, ad quadratum MI: & cum tres sint proportionales, rectangulũ NA, MI, est æquale quadrato LB. Itaque sũptis duplis rectangulum sub duplâ NA, in MI (siue rectangulum KMI,) æquale erit duplo quadrato BL, & additis æqualibus (ob circulum) rectangulis, MIK, BLO; duo rectangula KMI, MIK, (siue quadratum MI) æqualia erunt rectangulo BLO, cũ duplo quadrato BL. Sed rectangulum BLO, cum duobus quadratis BL, æquale est rectangulo OBL, & quadrato BL; Igitur quadratum MI, æquatur rectangulo OBL, cum quadrato BL, estque eadem ratio BL, ad MI,



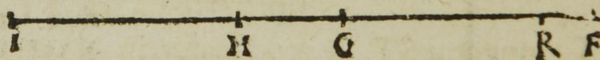
quæ MI, ad OB cum BL. Et vt quadratum BL, ad quadratum MI, ita BL, ad OB cum BL.

Sed vt quadratum LB, ad quadratum MI, ita demonstratum est superius esse quadratum NA, ad quadratum LB; Igitur vt quadratum NA, ad quadratum LB, ita LB, ad duas BL, OB siue vt quadratum AN, ad quadratum KN, ita NK, ad duas NK, NF. Quod erat demonstrandum.

Alios casus non persequor, cum scilicet punctum G, cadit vltra P, in lineâ AP, indefinitè productâ Ex jis enim quæ ante demonstrata sunt, illorum constructio & demonstratio sese offeret consideranti.

Absolvimus Itaque Problema, per circulum & Hyperbolem infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA DVODECIMVM



In rectâ IF, si fuerit vt IG, ad GH, ita GF, ad FR; erit vt IG, ad GH, ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, GFR.

CVm enim ponatur esse vt IG, ad GH, ita GF, ad FR, erit permutando & componendo, vt IF, ad GF, ita HG cum FR, ad FR, & rursus permutando vt IF, ad HG cum FR, ita FG, ad FR. Sed vt IF, ad HG cum FR, ita sumptâ communi altitudine FG, rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG,

RFG, Igitur vt FG, ad FR, sive IG, ad GH (ex constructione), ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Datis duabus rectis P, & Q, invenire tertiam vt Z, ad cuius quadratum, quadratum datæ P eandem habeat rationem, quæ est ipsius X, ad excessum X, supra Q.

Est autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ sublatere, & amphibolæ.

ACcipiatur AB, dupla P, bisecta in M, eique ad rectos AC, æqualis Q: perficiatur rectangulum ACB, & circa illud describatur circulus AFBC. Tum sumpto in MB, etiam indefinitè productâ, quolibet puncto E, producatur AC in K, fiatque vt ME, ad MB, ita AC, ad AK, & perficiatur rectangulum AELK. Bisectisque AK, EL, bifariam in S, & T, iungatur ST, & producatur in N, ita vt rectangulum SNT, ad quadratum TE, eandem habeat rationem, quam EM, ad MB; sumaturque SO, indirectum æqualis TN. Tum axe ON, fiat semi-ellipsis, in qua ratio axis ON, ad latus rectum, eadem sit quæ EM, ad MB, transibit illa per puncta, A & E, vt evidens est ex constructione. Si vero occurrat circulo, occurret in vno vel pluribus punctis. Occurrat in F, ex quo cadat in AB, normalis FG, quæ producta secet parallelas CD, KL, in punctis H, & I.

P

Q

X

Dico FG, esse æqualem X, quæsitæ, sive ita esse quadratum BM, ad quadratum FG, vt FG, ad excessum FG supra AC, vel GH.

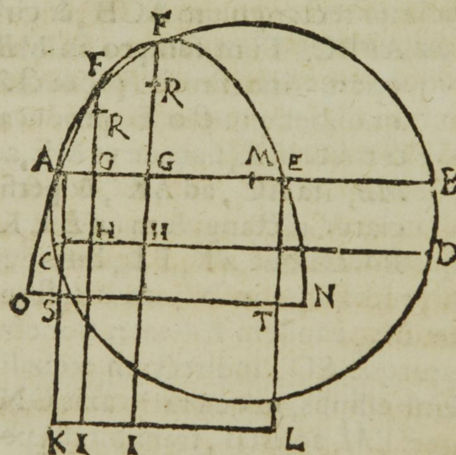
Fiat

Fiat vt BM ad ME, siue IG, ad GH, ita GF, ad FR.

Nunc (ob ellipsim) eadem erit ratio rectanguli EG*A*, ad rectangulum I*F*G, quæ est axis O N, ad latus rectum, siue *E* M, ad *B*M, hoc est HG, ad GI, ex constructione. Sed vt H G, ad GI, ita duo rectangula HGF, GFR, ad rectangulum I*F*G*, Igitur duo rectangula HG*F*, GFR, æqualia sunt rectangulo EG*A*. Et addito vtrimque rectangulo sub BE & GA, tria rectangula HGF, G*F*R, BE in GA, æqualia erunt duobus rectangulis EGA, & *B*E in GA, hoc est vnico BGA.

*p. lemm. 12.

Sed cum rectæ HG, & FR, æquales sint rectæ H*F* minus RG, sumpta communi altitudine GF, erunt rectãgula H G F, GFR, æqualia rectangulo *H* FG, minus rectangulo F G R. Igitur rectangulum *H F*G, minus rectangulo FGR, vna cum rectangulo *B*E in G A, æquale erit rectangulo *B*GA, & addito vtrimque rectangulo FGR, duo rectangula *H*FG, & B E in *G*A, æqualia erunt duobus BGA, F



GR. Sed rectangulum *B*G*A*, æquale est rectangulo *H*FG (ob circulum); Igitur, ablatis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula *B*E in *G*A, & FGR, eritque vt BE, ad GR, ita FG, ad *G*A.

Nunc, ex constructione, est vt BM, ad ME, ita *GF*, ad FR, erit

erit itaque per conversionem rationis, vt BM, ad BE, ita FG, ad GR; & permutando, vt BM, ad FG, ita BE, ad GR. Sed vt BE, ad GR, ita FG, ad GA (ex ante demonstratis); Igitur vt BM, ad FG, ita FG ad GA, & vt dupla BM (sive BA) ad duplam FG, ita FG, ad GA; & per consequens rectangulum BAG, æquale erit duplo quadrato FG, Sed rectangulum BAG, æquale est quadrato AG, vna cum rectangulo BGA (sive AFG, ob circulum): Igitur quadratum AG, vna cum rectangulo HFG, æquale erit duplo quadrato FG. Est autem rectangulum HFG, æquale quadrato FG, cum rectangulo FGH: quadrata itaque AG, FG, cum rectangulo FGH, æqualia erunt duplo quadrato FG & ablato vtrimque quadrato FG, quadratum AG, cum rectangulo FGH, æquale remanebit quadrato FG. Et ablato iterum vtrimque rectangulo FGH, quadratum AG, remanebit æquale quadrato FG, minus rectangulo FGH. ideoque erit eadem ratio FG, ad AG, quæ est ipsius AG, ad FG minus GH: & vt quadratum FG ad quadratum AG, ita FG, ad FG minus GH.

Sed vt FG ad AG, ita ostensum est esse, BM, ad FG, & vt quadratum FG, ad quadratum AG, ita quadratum BM, ad quadratum FG. Igitur vt quadratum BM, ad quadratum FG, ita FG, ad FG minus GH; sive ita FG, ad excessum FG, supra AC. Quod erat demonstrandum.

Determinationem Problematis & numerum radicum lectoris industriæ relinquo, cum hæc fuse ab alijs ostensa sint.

Sufficit nunc Problema per circulum & Ellipsim infinitis vt propositum est modis absolvisse. Quod erat faciendum.

LEMMA DECIMVM TERTIVM

Sumptis in rectâ IR, tribus punctis G, H, F, si fuerit vt

F GH,

GH, ad GI, ita FG, ad GR, erit vt GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF.



CVm enim sit vt GH, ad GI, ita FG, ad GR, erit convertendo & permutando, vt FG, ad *G*H, ita *G*R, ad *GI*, & dividendo vt FH, ad HG, ita GR minus *GI*, ad *GI*, & rursus permutando vt FH, ad *G*R minus GI, ita *G*H, ad *GI*. Sed vt *F*H, ad *G*R minus *GI*, ita, sumptâ communi altitudine *FG*, rectangulum *G*FH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF. Igitur vt *GH*, ad *GI*, ita rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IG*F*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DVODECIMA

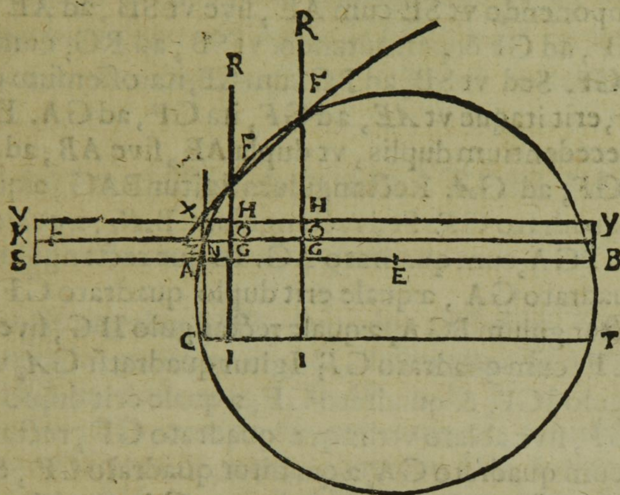
Idem per circulum & Hyperbolam iisdem modis efficere.

SVmptâ rursus AB, duplâ P, bisectâ in *E*, & AC normali, æquali Q, fiat rectangulum CA*B*T, & circa illud circulus, productâque BA quantumlibet in S, producatur item CA, in X, ita vt sit CA, ad AX, quemadmodum SE, ad *E*A, perfectisque rectangulis SAXV, XAY*B*, secentur XA, VS, bifariam in *K*, & N, iunctaque *K*N dividatur in Z, ita vt rectangulum KZN, ad quadratum NX, eam habeat rationem, quam habet C*A*, ad AX: sumptâque *K*L, æquali ZN, vertice *Z*, axe ZN, latere transverso L Z, recto vero, ad quod illud se habeat vt CA, ad AX, describatur semi-hyperbola ZXF, quæ vtique transibit per X, ex constructione, & siquidem occurrat circulo, id fiet in vno, vel pluribus punctis. Occurrat

in

in F, vnde demittatur in CT, normalis, FI, secans parallelas XY, KN productam & *AB*, in punctis H, O, *G*.

Dico F*G*, esse Z quæsitam, sive ita esse quadratum AE, ad quadratum F*G*, vt F*G*, ad excessum *FG* supra AC.



Fiat vt H*G*, ad GI, ita *G*F ad GR.

Quoniam itaque punctum *K*, est ad Hyperbolem, erit, ex sæpe ostensis, eadem ratio rectanguli GFH, ad rectangulum *K*ON, quæ est lateris recti, ad transversum, sive XA, ad AC, ex constructione, vel HG, ad GI. Sed vt *H*G, ad *G*I, ita idem rectangulum *G*FH, ad rectangulum R*G*F, minus rectangulo IGF*: Igitur rectangulũ *K*ON, sive S*G*A, æquale est rectangulo RGF, minus rectangulo I*GF*. Sed rectangulum *B*GA est etiam æquale rectangulo IFG (ob circulum); Itaque additis æqualibus, duo rectangula S*G*A, *BG*A, sive vnicum SB in *GA*, æquatur rectangulo RG*F*, minus rectangulo IGF, vna cum rectangulo IFG; & cum rectangulum IFG æquale sit rectangulo IGF vna cum quadrato F*G*; sequitur rectangulum SB in GA, æquale esse rectangulo RGF, cum quadrato GF,

* *p. lemm:* 13.

 hoc

hoc eſt rectangulo ex RG cum GF, in GF. Eſt itaque vt SB, ad RG cum GF, ita GF, ad GA.

Nunc vt IG, ad GH, ſive CA, ad AX, ita SE, ad AE, ex conſtructione: Igitur vt SE, ad AE ita RG, ad GF ex eadem. Et componendo vt SE cum AE, ſive vt SB, ad AE, ita RG cum GF, ad GF & permutando vt SB, ad RG, cum GF, ita AE ad GF. Sed vt SB, ad RG cum GF, ita oſtenſum eſſe GF, ad GA; erit itaque vt AE, ad GF, ita GF, ad GA. Et ſumptis antecedentium duplis, vt dupla AE, ſive AB, ad GF, ita dupla GF, ad GA. Rectangulum igitur BAG, æquale erit duplo quadrato GF. Sed rectangulum BAG, æquale eſt rectangulo BGA, cum quadrato AG. Itaque rectangulum BGA, cum quadrato GA, æquale erit duplo quadrato GF. Eſt autem rectangulum BGA, æquale rectangulo IFG, ſive rectangulo IGF, cum quadrato GF; Igitur quadratũ GA, vna cum rectangulo IGF, & quadrato GF, æquale erit duplo quadrato GF, ſive ablato vtrimque quadrato GF, rectangulum IGF, cum quadrato GA, æquabitur quadrato GF, & ablato vtrimque rectangulo IGF, quadratum GA, æquale erit quadrato GF, minus rectangulo IGF, hoc eſt æquale erit rectangulo, ex GF, in GF minus IG. Erit itaque vt GF, ad AG, ita GA, ad GF minus IG.

Sed vt GF, ad GA, ita oſtenſum eſt eſſe AE, ad GF; igitur vt AE, ad GF, ita GF, ad GA, & GA, ad GF minus IG. Et vt quadratum AE, ad quadratum GF, ita GF, ad GF minus IG, hoc eſt ad exceſſum GF, ſupra AC Quod erat demõſtrandum.

Reliqui caſus facile conſtruentur & demonſtrabuntur, ex ijs quæ propoſitione 2. & alijs oſtenſa ſunt. Determinationem vero Problematis, vt prius, lectori relinquimus.

Conſtat itaque nos id quod propoſitum erat per circulum & Hyperbolam infinitis modis effeciſſe. Quod erat faciẽdum.

Quo-

Quoniam vero anguli trisectione, & duarum mediarum inter datas inventione, omne problema solidum solvi potest; Non alienum ab hac materiâ visum est, anguli trisectionem per circulum & Hyperbolam demonstrare: vt ad investigandas methodo superiori infinitas Ellipses & Hyperbolas, quæ cum circulo idem præstant, lectorem excitemus. Sit itaque.

PROPOSITIO DECIMA TERTIA.

Angulum datum secare trifariam.

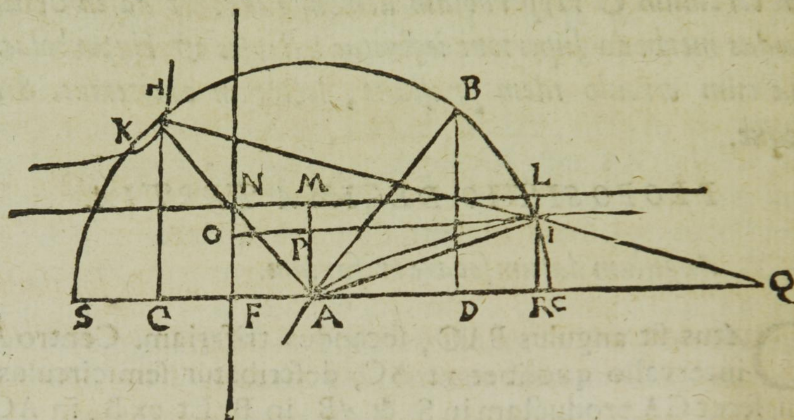
DAtus sit angulus *BAC*, secandus trifariam. Centro A intervallo quolibet vt AC, describatur semicirculus, qui secet CA productam in S, & *AB*, in B. Et ex B, in AC cadat normalis *BD*, tum ex AS, resecetur *AF*, æqualis dimidiæ AD, erectâque FN, æquali dimidiæ DB, & eidem parallelâ, ducatur NL, parallela AD. Demum circa asymptotos NF, NL, describatur hyperbola transiens per punctum A, quæ secet circulum in I, & iungatur AI.

Dico angulum IAC, subtriplum esse anguli *BAC*.

Sumatur AC, æqualis AD, & erigatur ad circulum normalis GH, quæ vtique erit æqualis DB, iunctisque *HA*, HI, producatur *HI*, donec occurrat lineæ AC productæ, in puncto Q. Tum perficiatur rectangulum F N *MA*, & ex puncto I, cadat in AC, normalis IR, quæ producta secet NM in *L*.) Et in *F*N normalis IO, secans *MA*, in P.

Quoniam igitur duo puncta I, & A, sunt in eâdem Hyperbolâ, & ex illis ductæ sunt ad asymptotos parallelæ IL, AM, & IO, FA, erit rectangulum OL, æquale rectangulo FM: & ablato communi rectangulo OM, additoque vtrimque rectangulo *AI*, rectangulum FI, æquale erit rectangulo AL; Itaque erit eadem ratio *L* R, ad FR, quæ est RI, ad RA; &

ſumptis duplis, vt dupla LR, ſive DB, hoc eſt HG, ad duplam FR, ita RI, ad R*A*. Sed dupla FR, æqualis eſt duplæ AF (hoc eſt AG) & duplæ AR, Igitur dupla RF, æqualis erit G*A* cum dupla AR, hoc eſt GR cum R*A*. Erit igitur vt HG,



ad GR cum R*A*, ita RI, ad R*A*, & permutando vt HG, ad RI, ita GR cum R*A*, ad R*A*.

Sed vt HG, ad RI, ita GQ, ad RQ; igitur vt GR cum R*A*, ad R*A*, ita GQ, ad RQ, & dividendo, vt GR, ad R*A*, ita eadem GR, ad RQ. Sunt ergo æquales *H*R, RQ. Sed anguli ad R ſunt recti, & RI communis, igitur æquales quoque ſunt rectæ I*A*, IQ & anguli I*A*R, IQR, & conſequenter angulus externus HI*A*, duplus eſt anguli IQC. Sed angulus HI*A* æqualis eſt angulo AHI, ob æquales *A*H, *A*I; itaque angulus *AH*I, duplus erit anguli IQC, & cum angulus H*A*S, ſit etiam æqualis duobus *A*HQ, *H*Q*A*, erit angulus *H*AS, triplus anguli IQ*A* vel I*A*Q. Sed angulus H*AS*, æqualis eſt angulo B*A*C, ex conſtructione. Conſtat itaque angulum B*A*C triplum eſſe anguli I*A*C. Quod erat demonſtrandum.

Eodem modo deſcriptâ per pũctum H ſectione oppoſitâ HK, occurrente

occurente circulo in K ostendetur (ducta AK) angulum K AS , esse subtriplum anguli S AB, residui ad duos rectos; sive quod idem est, arcum S K, esse tertiam partem arcus SB; & per consequens arcum KI, esse duas tertias semi-peripheriæ; sive tertiam partem integræ circumferentiæ.

APPENDIX

De solutione eorundem Problematum per circulum & Parabolam,

Parabolas, quæ cum circulo Problemata solida solvant, infinitas non esse, velut sunt Ellipses, & hyperbolæ penitior illarum linearum contemplatio satis ostendit. Duas, quæ sese offerunt, breviter indicabimus, in problemate primo.

ITaque (repetito eius Schemate) Quoniam ostensum est tres CA, EF, EA, esse proportionales, & CA data est (ex constructione) patet punctum F, esse ad parabolam cuius vertex est A, axis AF, & latus rectum eadem AF.

Similiter, quoniam etiam tres *AE*, EF, AD, demonstratæ sunt proportionales, & AD data est, sequitur idem punctum F, esse ad parabolam, cuius vertex A, axis AD, & latus rectum eadem AD.

Quæ observatio ad sex primas propositiones adstringitur, sed non difficulter, duas saltem parabolas, quæ proposito satisfaciant in propositionibus 7. 8. 9. 10. 11. 12. eodem modo reperies.

An vero non aliæ quoque ad hanc effectionem, cum circulo adhiberi possunt. Imo aliæ quoque, sed non infinitæ, unam damus in exemplum.

PRO-

PROPOSITIO DECIMA QVARTA.

Inter extremas datas, duas medio loco proportionales invenire, per circulum & parabolam.

SInt duæ datæ AD, maior, *A*B minor, & exijs rectangulum ABCD, ac circa illud circulus. Secentur *A*B, CD, bifariam in L, & M, & iunctâ LM, ſumatur in eâ LQ, æqualis AB: & ſumptâ AP, in *A*D, æquali LA, iungatur LP, & producatur donec cum CD, pariter productâ, concurrat in H. Tum producatur etiam ML, in I, itavt ſit eadem ratio QM, ad CH, quæ CH, ad MI, erectâque in I, normali, quæ cum *H*L productâ, concurrat in *K*, vertice *K*, diametro *KH*, deſcribatur parabola, cuius vna applicatarum ſit *H*C, & quæ circulum ſecet in F; vnde cadat in *A*D, normalis *F*E, ſecans parallelas BC, LM, in O, & N, & quæ producta occurrat L*H*, in G.

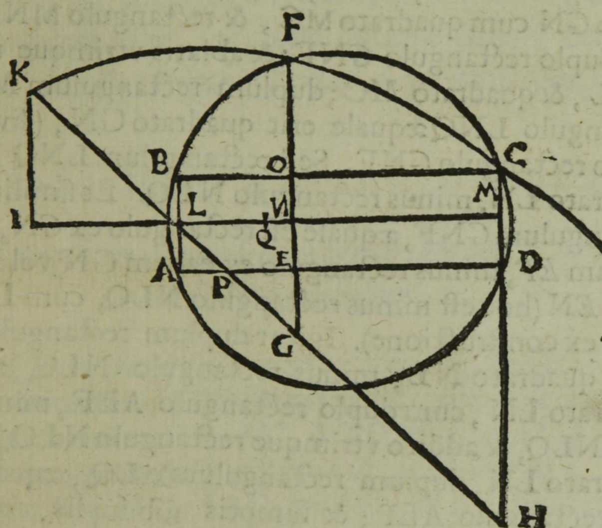
Dico quatuor *A*D, FE, E*A*, *AB*, eſſe continue proportionales.

Quadratum enim C*H*, eſt æquale duobus quadratis *H*M, *M*C, vna cum rectangulo ex *H*M in duplam MC. Sed *H*M, eſt æqualis ML, & LQ eſt dupla MC, (ex conſtructione;) igitur quadratum CH, eſt æquale quadrato *L*M, cum quadrato MC, & rectangulo M LQ. Quadratum vero C*H*, eſt æquale rectangulo IMQ (etiam ex conſtructione) Itaque rectangulum IMQ, eſt æquale quadratis LM, MC, cum rectangulo MLQ. Sed rectangulum IMQ, eſt æquale rectangulo ex IL in MQ, cum rectangulo LMQ, (hoc eſt cum quadrato *L*M, minus rectangulo M LQ:) Igitur rectangulum ex IL, MQ, cum quadrato LM, minus rectangulo MLQ, erit æquale quadratis ML, MC, cum rectangulo MLQ: & ablato vtrimque quadrato ML, & addito rectangulo MLQ, rec-

tangulum

tangulum ILMQ, æquabitur duplo rectangulo MLQ, cum quadrato MC.

Vlterius quoniam duæ CH, FG, ſunt applicatæ ad diametrum parabolæ, erit vt quadratum CH, ad quadratum FG, ita HK, ad GK. Sed vt HK, ad GK, ita MI, ad NI (ob parallelas): Igitur vt quadratum CH, ad quadratum GF, ita MI, ad NI, vel ſumptâ communi altitudine MQ, ita rectangulum IMQ, ad rectangulum ſub IN MQ, & permutando, vt



quadratum CH, ad rectangulum IMQ, ita quadratum GF, ad rectangulum ſub I N M Q. Eſt autem quadratum CH, æquale rectangulo IMQ (ex conſtructione,) Igitur quadratum FG, æquale etiam erit rectangulo IN MQ. Sed rectangulum INMQ, eſt æquale rectangulis ex ILMQ, & LNMQ: ex oſtenſis vero rectangulum ILMQ, æquatur duplo rectan-

gulo MLQ, cum quadrato MC. Igitur quadratum *FG*, æquale erit rectangulo LN MQ, cum duplo rectangulo MLQ, & quadrato MC. Et cum rurſus rectangulum LN MQ, æquale ſit duobus LNM, LNQ, ſequitur duo rectangula LNM, LNQ, cum duplo rectangulo MLQ & quadrato MC, æquari quadrato *FG*: hoc eſt duobus quadratis GN, NF cum duplo rectangulo GNF. *E*ſt autem quadratum *NF*, æquale quadrato NO, vel MC, cum rectangulo EFO, (ſive MNL ob circulum); Igitur duplum rectangulum MLQ, cum rectangulis LNM, LNQ, & quadrato MC, æquabitur quadrato *G*N cum quadrato MC, & rectangulo MNL, ac inſuper duplo rectangulo *GNF*: & ablatis vtrimque rectangulis MNL, & quadrato *MC*; duplum rectangulum MLQ, cum rectangulo LNQ æquale erit quadrato GN, (ſive LN,) & duplo rectangulo *G*NF. Sed rectangulum LNQ, eſt æquale quadrato LN, minus rectangulo NLQ. Et ſimiliter duplum rectangulum *G*NF, æquale eſt rectangulo ex *G*N, vel AE, in duplam *EF*, minus rectangulo ex eadem GN vel NL, in duplam *E*N (hoc eſt minus rectangulo NLQ, cum LQ ſit dupla NE, ex conſtructione). Igitur duplum rectangulum MLQ, cum quadrato NL, minus rectangulo NLQ, æquale erit quadrato LN, cum duplo rectangulo AEF, minus rectangulo NLQ, & addito vtrimque rectangulo NLQ, ablatoque quadrato LN, duplum rectangulum MLQ, æquale erit duplo rectangulo AEF; & ſumptis ſubduplis, rectangulum MLQ, (ſive *AB* CD ex conſtructione,) æquale erit rectangulo AEF. Eſt igitur vt D*A*, ad EF, ita EA, ad AB.

Cum autem (ob circulum) rectangulum EFO, ſit æquale rectangulo DEA, eſt etiam vt EF, ad EA, ita DE (ſive DA minus AE) ad *F*O (ſive FE minus EO, vel AB). Quatuor igitur rectæ DA, FE, EA, AB, habent conditiones lemmatis octavi, ſunt itaque continue proportionales. Quod erat demonſtrandum;

Corol-

Corollarium.

EX demonſtratis evidens, eſt quomodo duæ mediæ inter datas per parabolam & ellipſim vel Hyperbolam, pluries infinitis modis inveniantur. Cum enim tam parabolæ, quam ellipſes & Hyperbolæ, vt præſcriptum eſt, delineatæ, ſecent circulum in F, patet illas in eodem puncto ſibi occurrere.

Addamus aliud exemplum triſectionis anguli per circulum & parabolam illam, ad quam infinitæ ellipſes vel Hyperbolæ quæ idem Problema ſolvunt, (vt ita dicam) referuntur.

PROPOSITIO DECIMA QVINTA.

Angulum datum ſecare trifariam per circulum & parabolam.

SIt rurſus, vt in propoſitione 13. datus angulus BAC, ad centrum ſemicirculi *SBC*, & arcui *BC*, ſumatur æqualis *SH*, demiſſisque normalibus *HG*, & *BD*, biſecetur GA, in F; & in *B*, ductâ tangente BO, æquali FA, iungatur AO. Tum fiat vt vtraque BD, DA, ad AO, ita AO, ad AY, indirectum ipſi DA; & in puncto Y erectâ normali indefinitâ YP, inclinetur ad illam FX, angulo ſemirecto. Demum ex YP, reſecetur XP, quæ ad vtramque BD, DA, eandem habeat rationem, quam habet YF, ad FX; & vertice X, diametro X*F*, latere recto X*P*, deſcribatur parabola, cuius applicatæ ſint parallelæ XP, & quæ occurrat arcui *BC* in puncto *I*.

Dico, ductâ AI, angulum IAC, ſubtriplum eſſe anguli BAC.

Demittatur ex I, normalis IR, & producatur donec cum XF etiam productâ, concurrat in Z, iungaturque HI occurrens AC productæ in puncto Q.

Nunc ratio rectanguli PX in XZ, ad rectangulum ex vtraque BD, DA, in YR, componitur ex ratione XZ, ad YR, (hoc est FX, ad FY, ob paralelas YX, ZR,) & ex ratione PX, ad vtramque BD, DA; hoc est YF, ad FX, ex constructione, sed ex his rationibus componitur ratio FX, ad FX, siue æqualitatis: Igitur rectangulum ex vtraque BD, DA, in YR, æquale est rectangulo PXZ, hoc est quadrato ZI (ob parabolam). Sed rectangulum ex vtraque BD, DA, in YR,

æquale

æquale eſt rectangulo ex iiſdem BD, *DA*, in AY, (ſive quadrato AO, vel quadratis AB, *AF*, ex conſtructione,) vna cum rectangulo ex iiſdem BD, DA, in AR; Itaque duo quadrata *AB*, AF, vna cum rectangulis BDAR, DAR, æqualia ſunt quadrato IZ: Quadratum vero IZ, æquale eſt quadrato IR, cum quadrato RZ, ſive FR, & duplo rectangulo ZRI, hoc eſt duplo rectangulo *F*RI. Igitur duo quadrata A*B*, A*F*, cum rectangulis *B*D AR, DAR, æqualia ſunt quadratis IR, FR, cum duplo rectangulo FRI. Eſt autem quadratum FR æquale quadrato AF, cum rectangulo *G*RA, ſive cum quadrato AR, & rectangulo *G*AR, vel DAR; Itaque rurſus duo quadrata AB, AF, cum rectangulis B*D*AR, DAR, æqualia ſunt quadratis IR, AF, AR, cum rectangulo DAR, & duplo rectangulo FRI. Et ablato vtrimque rectangulo DAR, & quadrato AF, quadratum AB, cum rectangulo BD, AR, eſt æquale quadratis AR, RI cum duplo rectangulo FRI. Sed duo quadrata *A*R, RI æqualia ſunt quadrato *A*I, ſive A*B*; Igitur rurſus ablatis æqualibus, hinc quadratis *A*R, RI, inde quadrato *A*B, remanebunt æqualia rectangulum B*D*, AR, & duplum rectangulum *F*RI. *F*ietque vt B*D*, ſive *H*G, ad RI, ita dupla FR, ad RA. Sed cum tres GR, FR, AR, ſint in proportione arithmeticâ, dupla FR, æqualis eſt ambabus GR, RA. Igitur vt HG, ad RI, ita *G*R cum R*A*, ad R*A*.

At vt *H*G, ad RI, ita *G*Q, ad QR, itaque vt *G*R cum RA, ad R*A*, ita GQ, ad QR, & dividendo, vt GR, ad RA, ita GR, ad RQ. Vnde ſequitur AR, RQ, eſſe æquales, & cum anguli ad R ſint recti, triangulum AIQ, eſſe iſoſceles: ideoque angulum HIA, duplum eſſe anguli IAC. Et cum angulus *A*HI ſit æqualis angulo HIA; & vtrique *A*HI, IQ*A*, ſive I*A*C, æqualis ſit externus angulus HAS, evidens eſt eundem *H*AS (ſive *BA*C, ex conſtructione) anguli I*A*C, eſſe triplum. Quod erat demonſtrandum.

Non

Non absimili demonstratione ostendi potest, cum parabola etiam occurrat arcui SB in K, SK esse tertiam partem eiusdem arcus SB vt in propositione 13. Quod indicasse sufficiat, vt sit tandem

FINIS.



55

ERRATA quæ sensum turbare possent, aliquot adnotamus, reliqua lector benevolus corriget, & litteras in schematibus, quæ aliquando non satis expressæ sunt, ex constructionis ordine restituet.

paginâ	lineâ	corrige
1.	4. MHO	NHO
2.	15. CAE	DAE
4.	16. RE	RF
5.	5. demonstrandum	demonstratum.
6.	17. MFE	MEF
8.	1. OL	OI
9.	9. AE	AD
	23. GEF	GFE
	27. 29. 30. TOQ	TQO
12.	1. DFA	DEA
	9. FF	FE
14.	18. KC	KG
16.	9. GQH	RQH
	13. IQA	IAQ
	32. EQA	FQA
17.	27. IQ	IP
	28. PA	PH
19.	4. IKL	ILK
25.	30. BAF	DAF
26.	18. dele facilè	
39.	5. Z	X
41.	8. AFG	HFG
43.	6. K	F
45.	19. AC	AG

Z

57

